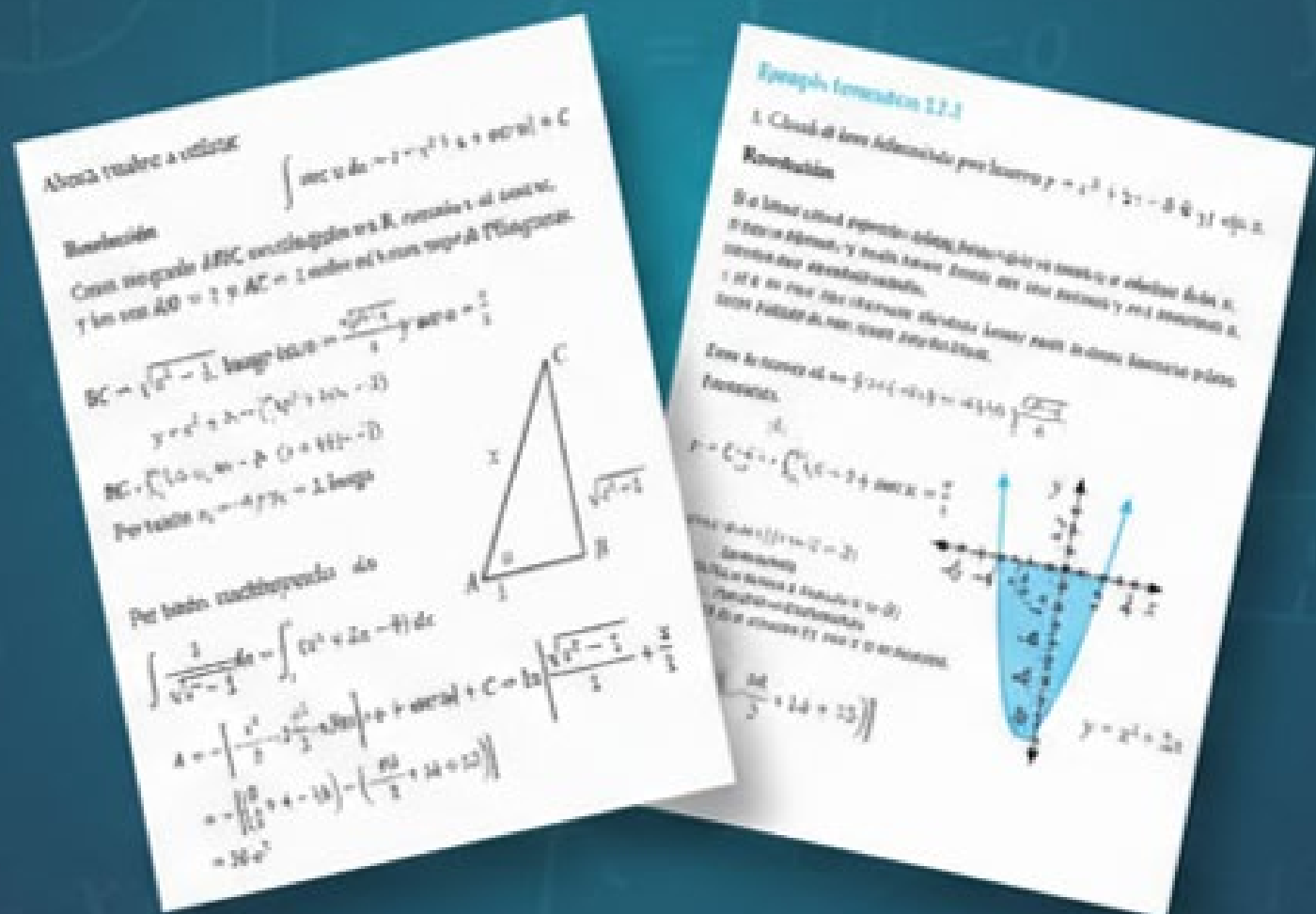


Cálculo II

CÁLCULO INTEGRAL

Modalidad Semiescolarizada



Faustino Vizcarra Parra
Rolando Forneiro Rodríguez
Victoria Bárbara Arencibia Sosa

Contenido

Dedicatoria y agradecimientos.....	2
Presentación	3
Tabla de categorías, subcategorías, aprendizajes de trayectoria y metas de aprendizaje de Cálculo II	5
PA 1. Diferencial de una función	8
PA2. Antiderivadas o primitivas de una función	17
PA 4. Método de sustitución o de cambio de variable.....	32
PA 5. Método de integración por partes	40
Integración por sustitución trigonométrica.....	49
PA 7. Integración por fracciones parciales.....	57
PA 8. El área y la integral definida.....	69
Bibliografía	83

Dedicatoria y agradecimientos

A nuestros queridos docentes.

Con profundo agradecimiento y admiración dedicamos este libro a aquellas y aquellos profesores excepcionales que, con su pasión por la enseñanza y su compromiso inquebrantable, han guiado la creación de estas páginas. Su dedicación en el desarrollo del pensamiento variacional con un enfoque conceptual ha iluminado el camino a otros docentes del Nivel Medio Superior (NMS) de la Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS).

Sus enseñanzas han sido como faros de sabiduría, iluminando mentes, inspirando la curiosidad y fomentando el gusto por el aprendizaje. En este sentido, este libro es un testimonio de ese arduo trabajo y devoción, y esperamos que sea bien recibido para formar las nuevas generaciones de estudiantes. Así, su uso en el proceso de enseñanza y aprendizaje nos invita a seguir aprendiendo y creciendo como un equipo de docentes, que ven en la innovación la importancia de incorporar la inteligencia artificial (IA) como un aliado.

Tomemos en cuenta que la integración de la inteligencia artificial en el proceso de enseñanza y aprendizaje emerge como un catalizador fundamental para el desarrollo del pensamiento variacional. Al aprovechar sus capacidades, la IA puede facilitar el acceso al conocimiento, personalizar el aprendizaje, optimizar los métodos pedagógicos y evaluar los resultados. Además, el estudiante la puede utilizar como un tutor en su proceso de aprendizaje. En definitiva, se reconoce el impacto de la IA como un aliado del docente en el proceso educativo.

En agradecimiento por sembrar las semillas para el desarrollo del pensamiento matemático en las y los estudiantes del NMS de la UAS, les extendemos nuestra más sincera gratitud. Que este libro sea un tributo a su legado en la formación de mentes brillantes y pensadores en el quehacer de las matemáticas.

Colaboradores:

Nombre	Nombre
Policarpio Sicairos Abitia	Alejandra Karina Vázquez Garay
Jesús Antonio García Duarte	Javier Vidaña Ramírez
Horacio Gabriel López Ramírez	Heriberto Carlos Ayala Cruz
Jorge Ramos Martínez	Alfonso Javier Salas Sánchez
Juan Carlos Pazos Robles	Eva Edith Verdugo Serrano
Silvestre Trinidad Quintero Ibarra	Jonathan Sánchez Rodríguez

Presentación

Es un placer presentarles este libro de Cálculo II (cálculo integral), que ha sido cuidadosamente diseñado para acompañar a las y los estudiantes de bachillerato en su fascinante travesía por el mundo de esa maravillosa forma matemática de pensar denominada pensamiento matemático, que proporciona una base sólida y estimulante para el aprendizaje.

Así, este libro es para utilizarse en la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) Cálculo II del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático, correspondiente al sexto semestre del componente fundamental y extendido del plan de estudios (UAS, 2024) del Currículo de la modalidad mixta opción mixta del bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa 2024 que, de acuerdo con el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) establecido por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2023a), enfatiza el desarrollo del pensamiento matemático.

El pensamiento matemático, según el MCCEMS, se define como:
un Recurso Sociocognitivo que involucra diversas actividades cognitivas que van desde la ejecución de operaciones y el desarrollo de procedimientos y algoritmos hasta abarcar procesos mentales abstractos, incluida la intuición, que se dan cuando el sujeto participa del quehacer matemático al resolver problemas, usar o crear modelos, elaborar tanto conjeturas como argumentos y organizar, sustentar y comunicar sus ideas. (SEP, 2023c, p. 17)

La secuencia de este libro está basada en progresiones de aprendizaje, cada una diseñada para desarrollar sobre la anterior un pensamiento matemático; para el caso particular de esta UAC, un pensamiento variacional.

En el sentido anterior, las progresiones de aprendizaje (PA) de la UAC Cálculo II desarrollan el pensamiento variacional para el logro de las metas de aprendizaje en la siguiente secuencia:

- PA 1. Diferencial de una función.
- PA 2. Antiderivadas o primitivas de una función.
- PA 3. Integral indefinida.
- PA 4. Método de sustitución o de cambio de variable.
- PA 5. Método de integración por partes.
- PA 6. Integración por sustitución trigonométrica.
- PA 7. Integración por fracciones parciales.
- PA 8. El área y la integral definida.

Bajo esta lógica del proceso de desarrollo del pensamiento matemático, las progresiones de aprendizaje están estructuradas y secuenciadas, en el sentido de que cada una es más compleja que la anterior, de acuerdo al nivel de pensamiento matemático que demande cada progresión. Cada una de ellas, se inicia con una evaluación diagnóstica; luego, le siguen ejemplos, actividades y evaluación formativas diseñadas atendiendo a las subcategorías de las categorías del pensamiento matemático, mismas que orientan hacia el logro de las metas de aprendizaje.

Además, en cada PA se consideran tres momentos claves de la evaluación: diagnóstica, formativa (mientras se aprende) y final; haciendo énfasis en la evaluación formativa en función de la retroalimentación, para que, durante el proceso de realizar las actividades de aprendizaje, las y los docentes puedan determinar el nivel de logro por los estudiantes, en particular, de las metas de aprendizaje que contribuyen a los aprendizajes de trayectoria. Es decir, se utiliza la evaluación formativa como herramienta para comprender su progreso y ajustar, en consecuencia, las estrategias activas.

También, durante el proceso de aprendizaje, en cada PA se lleva a cabo la autoevaluación (A), coevaluación (C) y heteroevaluación (H); para ello, se implementa como técnica principal de evaluación, la observación, utilizando guías específicas para tal fin. Los resultados se reflejarán en la tabla que aparece al inicio de cada progresión en correspondencia con el desempeño.

Por otra parte, se sugiere usar los códigos QR (generados en parzibyte: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>), así como la Inteligencia Artificial y las aplicaciones de celular como aliados en este proceso de aprendizaje. En cuanto a las representaciones gráficas que se incluyen, estas fueron hechas en Desmos y GeoGebra, así como las figuras en Word.

Finalmente, el desarrollar un pensamiento matemático no solo les abrirá las puertas en el aula, sino que también los acompañará a lo largo de sus vidas, dotándoles de la capacidad de enfrentar cualquier desafío con ingenio y perspicacia.

¡Adentrémonos juntos en el fascinante universo del pensamiento matemático!

Tabla de categorías, subcategorías, aprendizajes de trayectoria y metas de aprendizaje de Cálculo II

Cálculo II. Cálculo integral			
Categorías			
C1 Procedural	C2 Procesos de intuición y razonamiento	C3 Solución de problemas y modelación	C4 Interacción y lenguaje matemático
Subcategorías			
S1 Elementos aritmético-algebraicos	S1 Capacidad para observar y conjeturar	S1 Uso de modelos	S1 Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico
S2 Elementos geométricos	S2 Pensamiento intuitivo	S2 Construcción de modelos	S2 Negociación de significados
S3 Elementos variacionales	S3 Pensamiento formal	S3 Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios	S3 Ambiente matemático de comunicación
Aprendizajes de Trayectoria			
Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.	Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales,	Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.	Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

	humanidades y de la vida cotidiana).		
Metas de Aprendizaje			
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	M1-C3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.		M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando	M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de	M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de	M3-C4 Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para

recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	someterlo a debate o a evaluación.
	M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.		

PA 1. Diferencial de una función

Progresión de aprendizaje 1

Valora el concepto de diferencial de una función, analizando su significado geométrico y aplicándolo en la aproximación de funciones y estimación de errores.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	A			
	C			
	H			
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

En esta progresión se inicia con el concepto de diferencial de una función, pero antes de definirlo, recuerda la notación de la derivada de $y = f(x)$, propuesta por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) y la que propuso Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Notación de Leibniz $\rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) \leftarrow$ Notación de Lagrange

El símbolo no lo debes ver como fracción ordinaria, sino como el símbolo que caracteriza a la derivada, es decir, el límite de la razón de cambio.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Sin embargo, para algunas aplicaciones del cálculo integral, es necesario dar una interpretación por separado para dx (**la diferencial de x**) y dy (**la diferencial de y**).

Interpretación geométrica

La diferencial dy mide la variación de la recta tangente $y = g(x)$ a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, cuando la variable independiente pasa de x_0 a $x_0 + \Delta x$, como se muestra en las figuras de la derecha.

Es decir, para Δx cerca de cero, podemos aproximar $f(x_0 + \Delta x)$ mediante $g(x_0 + \Delta x)$, esto es $f(x_0 + \Delta x) \approx g(x_0 + \Delta x)$, como lo veremos a continuación.

La ecuación de la recta $y = g(x)$ que es tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ g(x) - g(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

y como $x = x_0 + \Delta x$, $g(x_0) = f(x_0)$ y $dx = \Delta x = x - x_0$, la ecuación se transforma a

$$g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot dx \quad (1)$$

Ahora, de las figuras anteriores tenemos que

$$dy = g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad (2)$$

En consecuencia, de (1) y (2) tenemos que la diferencial dy , es

$$dy = f'(x_0) \cdot dx \text{ para } f'(x_0) \neq 0.$$

Por otra parte, también de las figuras anteriores, tenemos que la variación o incremento Δy es

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \quad (3)$$

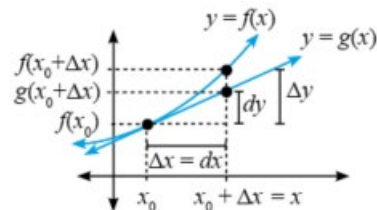
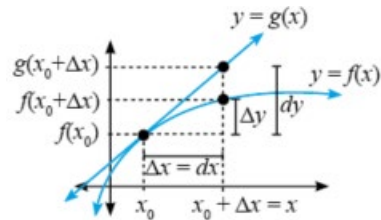
Y cuando $\Delta x \rightarrow 0$, vemos que $g(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0 + \Delta x)$, por lo tanto, de (2) y (3) se tiene que $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y \approx dy$. De donde $f(x_0 + \Delta x) \approx dy + f(x_0)$, cuyo error de aproximación es $|f(x_0 + \Delta x) - g(x_0 + \Delta x)|$.

De la interpretación geométrica de la diferencial dy , obtuvimos dos resultados importantes, mediante el primero de ellos, podemos aproximar el valor de la variación Δy para un incremento determinado Δx , mediante la diferencial dy .

Aproximar el valor de la variación Δy mediante la diferencial dy

El valor de la variación Δy para un incremento determinado $\Delta x = x - x_0$ se puede aproximar mediante la diferencial

$$dy = f'(x_0) \cdot dx, \text{ donde } dx = \Delta x \text{ y } f'(x_0) \neq 0.$$



Y mediante el segundo resultado, podemos aproximar el valor de una función en un punto usando la diferencial dy .

Aproximar el valor de una función en un punto usando la diferencial dy

El valor de la función $y = f(x)$ en $x = x_0 + \Delta x$ se puede aproximar mediante la expresión

$$f(x_0 + \Delta x) \approx dy + f(x_0)$$

donde $f(x_0)$ es un valor conocido de la función.

A partir de lo anterior, podemos definir la diferencial dy de una función en un punto.

Definición de la diferencial dy

Sea $y = f(x)$ una función derivable en cada $x \in (a, b)$. La diferencial dy de la función $y = f(x)$ es igual al producto de su derivada por la diferencial dx . En fórmula:

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

para los valores de x en los que $f'(x) \neq 0$.

El símbolo df es otra notación común para la diferencial de una función $y = f(x)$. Por ejemplo, si $f(x) = \sin x$, entonces podemos escribir $df = \cos x \, dx$. También podemos ver el símbolo " d " como un operador que actúa sobre una función para obtener la diferencial correspondiente. Por ejemplo, $d[x^2] = 2x \, dx$, $d[\ln x] = x^{-1} \, dx$, y así sucesivamente.

En cuanto a las reglas generales que tiene la derivada, estas tienen su versión correspondiente en la diferencial. A continuación, demostramos algunas reglas básicas de la diferencial.

Reglas básicas de la diferencial

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, b]$ y derivables para cada $x \in (a, b)$, y $C \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes equivalencias entre la derivada y la diferencial.

Derivada	Diferencial
1) $\frac{d}{dx}[C] = 0$	1) $d[C] = 0$
2) $\frac{d}{dx}[C \cdot f] = C \cdot \frac{df}{dx}$	2) $d[C \cdot f] = C \cdot df$
3) $\frac{d}{dx}[f \pm g] = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$	3) $d[f \pm g] = df \pm dg$
4) $\frac{d}{dx}[f \cdot g] = f \cdot \frac{dg}{dx} + g \cdot \frac{df}{dx}$	4) $d[f \cdot g] = f \, dg + g \, df$
5) $\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{g \cdot \frac{df}{dx} - f \cdot \frac{dg}{dx}}{g^2}, g(x) \neq 0$	5) $d\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}, g(x) \neq 0$

Demostración de la diferencial

$$1) d[C] = C' \cdot dx$$

$$2) d[C \cdot f(x)] = [C \cdot f(x)]' \cdot dx = C \cdot df(x)$$

$$3) d[f(x) \pm g(x)] = [f(x) \pm g(x)]' \cdot dx = [f'(x) \pm g'(x)] \cdot dx \\ = f'(x) \cdot dx \pm g'(x) \cdot dx = df(x) \pm dg(x)$$

$$4) d[f(x) \cdot g(x)] = [f(x) \cdot g(x)]' dx = [f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)] \cdot dx \\ = f(x) \cdot g'(x) \cdot dx + g(x) \cdot f'(x) \cdot dx = f(x) \cdot dg(x) + g(x) \cdot df(x)$$

$$5) d \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' dx = \left[\frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \right] dx = \frac{g(x) \cdot f'(x) \cdot dx - f(x) \cdot g'(x) \cdot dx}{g^2(x)} \\ = \frac{g(x) \cdot df(x) - f(x) \cdot dg(x)}{g^2(x)}, g(x) \neq 0$$

Cabe aclarar que la diferencial dy no es lo mismo que la derivada $y' = f'(x)$, es decir, la derivada en un punto desde la visión de Newton, representa la razón de cambio en un instante dado (desde la visión Leibniz, representa la pendiente de la recta tangente en un punto de f). Mientras que la diferencial dy en un punto representa la variación en la variable dependiente y , a lo largo de la recta tangente cuando x varía en una cantidad $\Delta x = dx \neq 0$. A continuación, calculemos la derivada y la diferencial de una función.

Ejemplo formativo 1.1

1. Calcula la derivada y la diferencial de las siguientes funciones.

Función	Derivada	Diferencial
a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$	$f'(x) = 6x + 2$	$df = (6x + 2)dx$
b) $g(x) = \frac{4x+2}{x^2+3}$	$g'(x) = -\frac{4(x^2+x-3)}{(x^2+3)^2}$	$dg = -\frac{4(x^2+x-3)}{(x^2+3)^2} dx$
c) $h(x) = \sqrt{x^3-3}$	$h'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-3}}$	$dh = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-3}} dx$
d) $y = xe^{6x}$	$y' = e^{6x}(6x+1)$	$dy = e^{6x}(6x+1)dx$
e) $y = \ln(3x-2)$	$y' = \frac{3}{3x-2}$	$dy = \left(\frac{3}{3x-2}\right) dx$
f) $y = \cos(5x^3+3)$	$y' = -15x^2 \sin(5x^3+3)$	$dy = -15x^2 \sin(5x^3+3) dx$

Aproximación de un valor de una función mediante la diferencial

Una de las aplicaciones de la diferencial dy es la de aproximar un valor de la función $y = f(x)$ en $x = x_0 + \Delta x$ para Δx pequeños mediante la expresión $f(x_0 + \Delta x) \approx dy + f(x_0)$, para ello necesitamos conocer el valor de $f(x_0)$ y de su derivada $f'(x_0)$. Recordemos que $dy = f'(x_0)dx$.

Ejemplo formativo 1.2

1. Calcula aproximadamente el valor de $\sqrt{25.6}$.

Resolución

Debes calcular: $f(x_0 + \Delta x) \approx dy + f(x_0) = f'(x_0)dx + f(x_0)$.

Considera la función $y = \sqrt{x}$ y el valor de $x_0 = 25$ cercano a $x = 25.6$, en el cual conoces lo que vale la función $f(x_0) = \sqrt{x_0}$ y su derivada $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

$$f(25) = \sqrt{25} = 5$$

$$f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{(2)(5)} = \frac{1}{10}$$

$$dx = \Delta x = x - x_0 = 0.6$$

$$f(25.6) = \sqrt{25.6} = \sqrt{25 + 0.6} \approx f(25) + f'(25)(0.6) = 5 + \left(\frac{1}{10}\right)(0.6) = 5.06$$

Por lo tanto, la aproximación es: $\sqrt{25.6} \approx 5.06$.

Ejemplo formativo 1.3

1. Calcula aproximadamente el valor de $\sin 31^\circ$.

Resolución

Debes calcular: $f(x_0 + \Delta x) \approx dy + f(x_0) = f'(x_0)dx + f(x_0)$.

Considera la función $f(x) = \sin x$ y el valor de $x_0 = 30^\circ$ cercano a $x = 31^\circ$, en el cual conoces lo que vale la función $f(x_0) = \sin x_0$ y su derivada $f'(x_0) = \cos x_0$.

$$f(30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$f'(30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$dx = \Delta x = x - x_0 = 1^\circ, \text{ en radianes es equivalente a } \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$f(31^\circ) = \sin 31^\circ = \sin (30^\circ + 1^\circ) \approx f(30^\circ) + f'(30^\circ) \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

Por lo tanto, la aproximación es: $\sin 31^\circ \approx 0.5151$.

En el ejemplo anterior, el valor de la diferencial dx lo convertimos de grados a radianes para poder realizar la operación suma. Si usamos $dx = 1^\circ$ en la operación $\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1^\circ)$, se tiene que:

- El primer sumando es $\frac{1}{2}$, el cual es un número real, y
- El segundo sumando es $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1^\circ)$ el cual son grados sexagesimales, pues es la multiplicación de un número real por grados sexagesimales, lo cual si es posible realizar, por ejemplo: $(2)(3^\circ) = 6^\circ$, y el resultado queda en grados sexagesimales.

Lo que no podemos realizar en este caso, es la suma de un número real con grados sexagesimales, por ejemplo: $5 + 9^\circ = ?$, es por ello que el valor de la diferencial dx lo convertimos de grados sexagesimales a radianes.

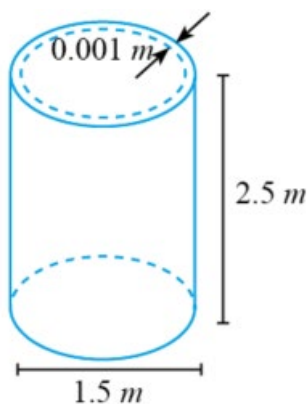
Aproximación de la variación mediante la diferencial

La diferencial dy también se usa para aproximar el incremento Δy , donde el error $|\Delta y - dy|$ depende de la variación $\Delta x = x - x_0$ de la variable independiente, como lo veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo formativo 1.4

1. Un tanque cilíndrico tiene una altura de 2.5 metros y un diámetro de 150 centímetros. Si en la parte interior (no a la tapa ni a la base) se le coloca una capa de pintura de 1 milímetro, determina:
 - a) La variación en el volumen ΔV .
 - b) La aproximación de la variación del volumen dV .
 - c) El error de aproximación $|\Delta V - dV|$.

Resolución



a) Fórmula del volumen del cilindro: $V(r) = 2\pi rh$

Debes calcular: $\Delta V = V(r) - V(r_0)$

Radio del cilindro original: $r_0 = 0.75$ m

Radio del cilindro con la capa de pintura:

$$r = 0.75 - 0.001 = 0.749 \text{ m}$$

$$V(0.749) = \pi(0.749)^2(2.5) \text{ m}^3 \text{ y}$$

$$V(0.75) = \pi(0.75)^2(2.5) \text{ m}^3$$

$$\Delta V = V(r) - V(r_0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi(0.749)^2(2.5) - \pi(0.75)^2(2.5) \\
 &= 2.5\pi[(0.749)^2 - (0.75)^2] \\
 &= -0.0037475\pi \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

La variación en el volumen es de: $-0.0037475\pi \text{ m}^3$

b) La altura h en el volumen del cilindro es fija, entonces: $V(r) = 2.5\pi r^2$

Debes calcular: $dV = V'(r_0) dr$, donde $V'(r_0) = 5\pi r_0$

Radio del cilindro original: $r_0 = 0.75 \text{ m}$

Razón de cambio en el volumen cuando $r_0 = 0.75 \text{ m}$

$$V'(0.75) = (5)(0.75)\pi = 3.75\pi \text{ m}^2$$

La diferencial de r : $dr = r - r_0 = -0.001 \text{ m}$

La diferencial de V : $dV = (3.75\pi)(-0.001) = -0.00375\pi \text{ m}^3$

Cuando se coloca una capa de pintura de un 1 milímetro de espesor a la pared interior del cilindro, la variación aproximada en el volumen es $-0.00375\pi \text{ m}^3$.

c) Debes calcular: $|\Delta V - dV|$.

$$|\Delta V - dV| = |-0.0037475\pi - (-0.00375\pi)| = 0.0000025\pi \text{ m}^3$$

El error de aproximación es de $0.0000025\pi \text{ m}^3$.

Ejemplo formativo 1.5

1. Un disco metálico se dilata por la acción del calor de manera que su radio aumenta de 5 a 5.05 centímetros. Determina el valor aproximado del incremento del área.

Resolución

Fórmula del área del disco: $A(r) = \pi r^2$

Debes calcular: $dA = A'(r_0)dr$, donde $A'(r_0) = 2\pi r_0$

Radio del disco original: $r_0 = 5 \text{ cm}$

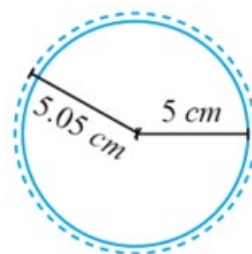
Radio del disco dilatado: $r = 5.05 \text{ cm}$

Razón de cambio en el área cuando $r_0 = 5 \text{ cm}$: $A'(5) = 2(5)\pi = 10\pi \text{ cm}$

La diferencial de r : $dr = r - r_0 = 5.05 - 5 = 0.05 \text{ cm}$

La diferencial de A : $dA = (10\pi)(0.05) = 0.5\pi \text{ cm}^2$

Cuando el disco metálico se dilata 0.05 centímetros por la acción del calor, la variación aproximada en el área es $0.5\pi \text{ cm}^2$.



Cuando se nos pide calcular un valor aproximado de la variación de la variable dependiente de una función para variaciones pequeñas de la variable independiente, como en los ejemplos resueltos, es más fácil calcular la diferencial correspondiente a la variable dependiente y usar este valor, en vez de la variación.

Evaluación formativa 1.1

1. Calcula la diferencial de las siguientes funciones.

a) $y = 9x^3 - x^2$

b) $y = (x^5 - x^3 + 2)^4$

c) $y = 6\sqrt[3]{x^2}$

d) $y = \sqrt{9 + 3x - 2x^2}$

e) $y = x^3\sqrt{1 - 3x^2}$

f) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

g) $y = \frac{x-1}{x+2}$

h) $y = \sqrt{\frac{x^5 + x^3 - 3}{x^2 + 3}}$

i) $y = -3x^2 \cos(2x)$

j) $y = 2x^5 - \cos^2(x+1)$

k) $y = \frac{2}{5} \sin\left(\frac{6x^2 - 2}{5}\right)$

l) $y = \ln x - \tan(-5x^2 - 7)$

m) $y = \sqrt{\sin(x^2 + 1)}$

n) $y = \sqrt{\tan(x - 5)}$

ñ) $y = e^{x^2} - \cot(x^3 - 1)$

o) $y = \arcsen x$

p) $y = \arctan x$

q) $y = \frac{xe^x}{2+x}$

r) $y = \sqrt{e^x}$

s) $y = \frac{1}{\sqrt{2-e^x}}$

t) $y = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$

u) $y = 7^{x^2 - 1}$

v) $y = 6^{\sqrt{x+2}}$

w) $y = (2^{x+1} - 3^x)^3$

x) $y = 5^x + \ln(x+2)$

2. Calcula aplicando diferenciales, el valor aproximado de:

a) $\sqrt{82}$

b) $\sqrt[6]{63}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{26}}$

d) $\frac{1}{4.02}$

e) $\ln(1.3)$

f) $\tan 31^\circ$

g) $(0.99)^3$

h) $\sin 46^\circ$

3. ¿Se puede utilizar $y = x$ para aproximar $f(x) = \sin x$ cerca de $x = 0$? ¿Por qué si o por qué no?

4. Utiliza la información para evaluar y comparar Δy y dy .

a) $y = 2x^3$ $x = 2$ $\Delta x = dx = 0.2$

b) $y = 3 - x^4$ $x = 1$ $\Delta x = dx = -0.03$

c) $y = x^2 - 3$ $x = -1$ $\Delta x = dx = 0.1$

5. Calcula el incremento aproximado del volumen de un cubo cuyos lados miden 3 *cm* y aumentan 0.002 *cm* cada uno.

6. Un bioquímico industrial encontró que, si se aplica a una persona x unidades de una droga por día, la presión arterial de ella se mantiene en $P(x) = (100x + 240)/(x + 2)$ milímetros de mercurio. Aproxima por diferenciales el cambio de presión que experimenta la persona cuando la dosis diaria se reduce de 2 a 1.5 unidades.

7. Se desea revestir un techo semiesférico de 5 m de radio con una losa de concreto de 10 cm de espesor. Usa diferenciales para aproximar la cantidad en metros cúbicos de concreto a utilizar.
 8. Un globo esférico se infla con gas, usa diferenciales para aproximar el incremento del área de la superficie del globo cuando el diámetro varía de 60 a 60.6 cm.
 9. En una placa cuadrada de circuitos para un procesador, con el incremento en la temperatura que se genera por el funcionamiento del procesador, se produce una dilatación lineal de los lados de la placa del 0.3%. El lado de cada placa mide 7 milímetros, aproxima por diferenciales el aumento en el área de la placa.
 10. Una quemadura en la piel de una persona tiene una forma circular, usa diferenciales para determinar la disminución aproximada del área de la quemadura cuando el radio disminuye de 1 cm a 0.8 cm.
 11. Un tumor en el cuerpo de una persona tiene una forma esférica, usa diferenciales para determinar el incremento aproximado del volumen del tumor cuando el radio aumenta de 1.8 cm a 1.9 cm.
-

PA2. Antiderivadas o primitivas de una función

Progresión de aprendizaje 2

Diseña estrategias para encontrar antiderivadas o primitivas de funciones, justificando los métodos utilizados y verificando los resultados mediante diferenciación.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	A			
	C			
	H			
M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	A			
	C			
	H			
M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M3-C4 Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o evaluación.	A			
	C			
	H			

La matemática parte de postulados o axiomas, que son afirmaciones que se asumen como verdaderas, y a medida que la matemática va construyéndose, se van formulando conjeturas, estas afirmaciones se consideran supuestamente ciertas, y una vez que se demuestran reciben el nombre de teoremas, que son afirmaciones demostradas a partir de axiomas u otros teoremas ya demostrados. La importancia de definir estos conceptos, es porque daremos a conocer teoremas con su respectiva demostración, los cuales usaremos para resolver ejercicios y problemas.

Regresemos al problema de si existe una operación inversa a la derivación. Recordemos que, en cálculo diferencial, a partir de una función f calculamos su derivada f' , ahora, dada una función f , debemos encontrar una función F tal que $F' = f$. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo formativo 2.1

Dada la función $f(x) = 3x$ determina $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

Resolución

Al derivar $F(x) = \frac{3x^2}{2}$, se tiene que $F'(x) = \frac{(2)(3)x}{2} = 3x$, por lo que $F'(x) = f(x)$.

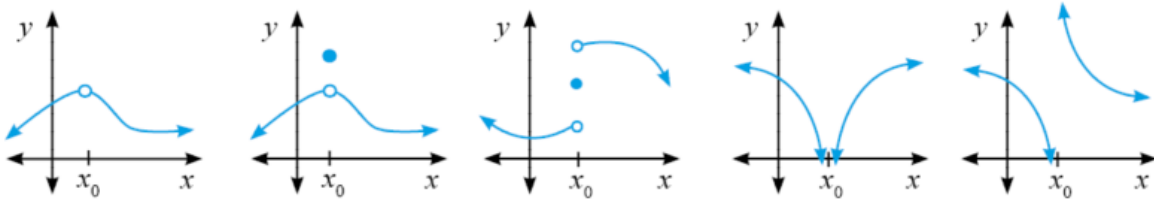
En la actividad anterior, observemos que la función $F(x)$ propuesta en cada inciso, es una antiderivada o primitiva de $f(x)$, ya que $F'(x) = f(x)$. Sin embargo, falta precisar el intervalo donde se satisface que $F'(x) = f(x)$ para cada x en dicho intervalo.

Definición de una antiderivada o primitiva de f

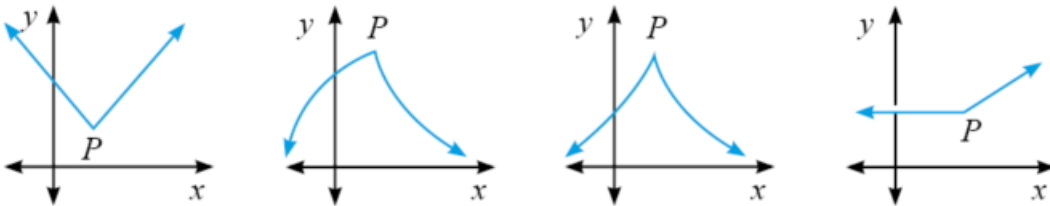
Una función $F(x)$ es una antiderivada o primitiva de la función $f(x)$ sobre un intervalo, si para cada x en el intervalo, se tiene que $F'(x) = f(x)$.

Para determinar el intervalo donde se satisface que $F'(x) = f(x)$, debemos recordar que $F'(x)$ no existe en el punto $P(x_0, F(x_0))$, si:

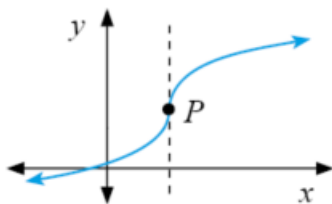
- La función F es discontinua en x_0 .



- La representación gráfica de F tiene una punta o pico en $P(x_0, F(x_0))$.



- En el punto $P(x_0, F(x_0))$ la recta tangente a F es vertical.



Como consecuencia del comportamiento de F en un punto dado, al determinar los valores de x en los que se satisface que $F'(x) = f(x)$, nos podemos encontrar casos en los que se tiene más de un intervalo.

Ejemplo formativo 2.2

1. Determina una antiderivada $F(x)$ de las funciones dadas.

a) $f(x) = \frac{1}{2}$ para todo $x \in (-\infty, +\infty)$.

b) $f(x) = \frac{2}{x}$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Resolución

a) $f(x) = \frac{1}{2}$ para todo $x \in (-\infty, +\infty)$.

Si $F(x) = \frac{x}{2}$, entonces $F'(x) = \frac{1}{2}$ para cada $x \in (-\infty, +\infty)$.

b) $f(x) = \frac{2}{x}$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Si $F(x) = \ln x^2$, entonces $F'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$ para cada $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

De acuerdo con el Ejemplo formativo 2.2, para obtener una antiderivada $F(x)$, usamos las fórmulas básicas de derivación vistas en cálculo diferencial, por lo que podemos decir que a este proceso se le llama antiderivación o integración.

Por otra parte, hemos hablado de que $F(x)$ es una antiderivada o primitiva de la función $f(x)$, y no, la antiderivada o primitiva de $f(x)$.

Como podemos observar, la antiderivada de $f(x) = x^3$ no es única, es por ello que se habla de una antiderivada de $f(x)$, en consecuencia, proponemos el siguiente teorema.

Teorema 1. Si $F(x)$ es una antiderivada o primitiva de la función $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$, y C una constante real, entonces $G(x) = F(x) + C$ es también una primitiva de la función $f(x)$.

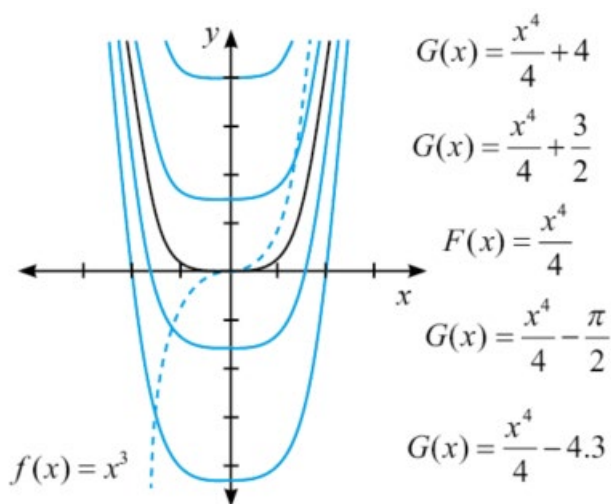
Demostración

Sea $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Luego, $G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$.

$\therefore G(x) = F(x) + C$ es también una primitiva de la función $f(x)$.

Del Teorema 1, se deduce que a una antiderivada o primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$, si se le suma o se le resta un número real, esta sigue siendo una antiderivada de la función $f(x)$. Lo anterior lo puedes ver en la representación gráfica de la derecha.



De la representación gráfica anterior, observamos que cada una de las antiderivadas de $f(x) = x^3$ es una traslación vertical de la antiderivada, es decir, es una familia de antiderivadas de $f(x) = x^3$, paralelas a $F(x)$, las cuales difieren en una constante real C .

Ahora demostraremos que cualquier antiderivada de f debe ser de la forma $G(x) = F(x) + C$; es decir, dos antiderivadas de la misma función pueden diferir cuando mucho en una constante real.

Teorema 2. Si $G'(x) = F'(x) = f(x)$ para $x \in [a, b]$, entonces $G(x) - F(x) = C$ para todo $x \in [a, b]$ y C una constante real.

Demostración

Definamos $g(x) = G(x) - F(x)$.

Como $G'(x) = F'(x)$, resulta que $g'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Sean x_1, x_2 tales que $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, por el teorema del valor medio.

existe $k \in (x_1, x_2)$ tal que $g'(x) = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$, o bien $g(x_2) - g(x_1) = g'(k)(x_2 - x_1)$.

Pero $g'(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$, en particular $g'(k) = 0$.

Por consiguiente $g(x_2) - g(x_1) = 0$, de donde $g(x_2) = g(x_1)$.

Pero como $x_1 \neq x_2$, entonces $g(x) = C$, para $C \in \mathbb{R}$.

$\therefore G(x) - F(x) = C$.

Como consecuencia del Teorema 1 y del Teorema 2, $G(x) = F(x) + C$ representa a la familia de antiderivadas de $f(x)$. En cuanto a la constante real C , se le denomina constante de integración.

Ejemplo formativo 2.3

1. Determina la familia de antiderivadas o primitivas G de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x + x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. b) $f(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

c) $f(x) = \sec^2 x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq \frac{k\pi}{2}$ y k entero impar.

Resolución

a) $f(x) = x + x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

La familia de primitivas de $f(x) = x + x^2$ está formada por la familia de funciones $G(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C$, pues $G'(x) = x + x^2$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

La familia de antiderivadas de $f(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ es la familia de funciones $G(x) = \sqrt[3]{x} + C$, pues $G'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ para cada $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

c) $f(x) = \sec^2 x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq \frac{k\pi}{2}$ y k entero impar.

La familia de antiderivadas de $f(x) = \sec^2 x$ es la familia de funciones $G(x) = \tan x + C$, ya que $G'(x) = \sec^2 x$, para cada $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq \frac{k\pi}{2}$ entero impar.

Vimos que la antiderivada o primitiva de $f(x)$ no es única, es decir, existe una infinidad de funciones de la forma $F(x) + C$ con C una constante, todas las cuales forman la familia de antiderivadas $G(x) = F(x) + C$ de la función $f(x)$.

A través de la derivada podemos establecer la familia de primitivas $G(x)$ de funciones elementales $f(x)$.

Teorema 3. Para cada intervalo en donde se satisfaga que $G'(x) = f(x)$, la familia de antiderivadas o primitivas $G(x)$ de la función:

a) $f(x) = 0$ es $G(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = k$ es $G(x) = kx + C$, $k \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = x^n$ es, si $n \neq -1$

d) es $G(x) = \ln |x| + C$, si $x \neq 0$

e) $f(x) = \cos x$ es $G(x) = \sin x + C$

f) $f(x) = \sin x$ es $G(x) = -\cos x + C$

g) $f(x) = \sec^2 x$ es $G(x) = \tan x + C$

h) $f(x) = \sec x \tan x$ es $G(x) = \sec x + C$

i) $f(x) = \csc^2 x$ es $G(x) = -\cot x + C$

j) $f(x) = \csc x \cot x$ es $G(x) = -\csc x + C$

k) $f(x) = e^x$ es $G(x) = e^x + C$

l) $f(x) = b^x$ es, si $b > 0$ y $b \neq 1$

Demostración:

a) $(C)' = 0$

b) $(kx + C)' = (kx)' + (C)' = k$

c) $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' + (C)' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$

d) $(\ln |x| + C)' = (\ln |x|)' + (C)' = \frac{1}{x}$

e) $(\sin x + C)' = (\sin x)' + (C)' = \cos x$

f) $(-\cos x + C)' = (-\cos x)' + (C)' = \sin x$

g) $(\tan x + C)' = (\tan x)' + (C)' = \sec^2 x$

h) $(\sec x + C)' = (\sec x)' + (C)' = \sec x \tan x$

i) $(-\cot x + C)' = (-\cot x)' + (C)' = \csc^2 x$

j) $(-\csc x + C)' = (-\csc x)' + (C)' = \csc x \cot x$

k) $(e^x + C)' = (e^x)' + (C)' = e^x$

l) $\left(\frac{b^x}{\ln b} + C\right)' = \left(\frac{b^x}{\ln b}\right)' + (C)' = \frac{\ln b \cdot b^x}{\ln b} = b^x$

Evaluación formativa 1.1

1. Determina una función F cuya derivada sea f . ¿Qué estrategia vas a usar para determinar F ?

a) $f(x) = 0$ $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ b) $f(x) = 1$ $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

c) $f(x) = -5$ $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ d) $f(x) = 2x$ $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

e) $f(x) = 3x^2$ $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ f) $f(x) = e^x$ $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

g) $f(x) = x^5$ $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ h) $f(x) = x^6$ $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

i) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ j) $f(x) = \frac{1}{x}$ $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

k) $f(x) = 6^x \ln 6$ $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ l) $f(x) = \cos x$ $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

m) $f(x) = -\sin x$ $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ n) $f(x) = \sec^2 x$ $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

ñ) $f(x) = -\csc^2 x$ $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

o) $f(x) = \sec x \tan x$ $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. Determina la familia de antiderivadas o primitivas G de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = -3e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

d) $f(x) = x + 4$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

e) $f(x) = \frac{x^{-1/2}}{2}$, para todo $x \in (0, \infty)$.

3. Determina la familia de antiderivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = e^{2x}$ b) $g(x) = \cos(4x)$ c) $h(x) = (x + 1)^3$ d) $f(x) = (5x + 1)^{1/2}$

4. Determina si el enunciado es falso o verdadero. Explica por qué o proporciona un ejemplo que lo demuestre.

a) Cada antiderivada o primitiva de una función polinomial de grado n es una función polinomial de grado $(n + 1)$.

b) La antiderivada o primitiva de $f(x)$ es única.

c) $F(x) = (x + 1)^2$ es una antiderivada de $f(x) = 2x$.

d) $F(x) = \ln(x + 1)$ es una antiderivada de $f(x) = \frac{1}{x}$.

e) Toda función $y = f(x)$ tiene una primitiva.

5. Dada la familia de primitivas de la función f , determina f tal que $G' = f$.

a) $G(x) = \ln x - \frac{x^2}{3} + C$

b) $G(x) = -\frac{1}{x} + \cos x + C$

c) $G(x) = 16x^2 + 64x + C$

d) $G(x) = \sqrt{x} + 2e^x + C$

PA 3. Integral indefinida

Progresión de aprendizaje 3

Analiza el concepto de integral indefinida, estableciendo su relación con las antiderivadas y aplicándolo a la resolución de ecuaciones diferenciales elementales.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	A			
	C			
	H			
M1-C3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

La derivada de $y = f(x)$ con respecto de x se representa mediante la siguiente simbología:

$$y', f', D_x, \frac{dy}{dx}$$

Para el caso de la antiderivada, se usa un símbolo especial para representar al conjunto de antiderivadas $F(x) + C$ de la función $f(x)$.

Definición de la integral indefinida de f

El conjunto de antiderivadas $\{F(x) + C\}$ de la función $f(x)$, se denomina integral indefinida de $f(x)$, con respecto a x , y se representa mediante

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

El símbolo $\int$ es un signo de integral. La función f es el integrando de la integral, y x es la variable de integración.

El adjetivo "indefinida" enfatiza que las antiderivadas o primitivas F de una función $y = f(x)$ se diferencian una de otra en un término constante, y debido a este término que se llama constante de integración C , es que la primitiva más general $G(x) = F(x) + C$ de f es una función "genérica".

Ejemplo formativo 3.1

1. Calcula las siguientes integrales y comprueba su resultado mediante la derivada.

a) $\int dx = x + C$, dado que $\frac{d}{dx}(x + C) = 1$.

b) $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$, dado que $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = x$.

c) $\int \sqrt{x} dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$, dado que $\frac{d}{dx}\left(\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C\right) = \sqrt{x}$.

d) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, dado que $\frac{d}{dx}(\ln|x| + C) = \frac{1}{x}$.

El símbolo diferencial dx , en las operaciones de derivación y antiderivación

$$\frac{d}{dx}[\] \text{ y } \int[\] dx$$

sirve para identificar la variable independiente. Si se usa una variable independiente que no sea x , digamos t , entonces la notación debe ajustarse adecuadamente. Así,

$$\frac{d}{dt}[F(t)] = f(t) \text{ y } \int[f(t)]dt = F(t) + C$$

Independientemente de la letra que usemos para representar la variable independiente en una función, al momento de integrar, en la diferencial se hace el cambio necesario.

Por ejemplo, al integrar la función $f(w) = w^3 - 2w + 1$, se tiene $\int(w^3 - 2w + 1)dw$. Y si cambiamos la variable independiente por t , la integral indefinida es $\int(t^3 - 2t + 1)dt$.

Por otra parte, la diferencial dx a veces se absorbe en el integrando. Por ejemplo,

$$\int 1 dx \text{ se puede escribir como } \int dx$$

$$\int \frac{1}{x^5} dx \text{ se puede escribir como } \int \frac{dx}{x^5}$$

La integral indefinida $\int f(x)dx$ y la derivada $\frac{df(x)}{dx}$ son procesos inversos. Es decir, la integración y la derivación son operaciones inversas, como se muestra a continuación.

Como sabemos, $\int f(x) dx = F(x) + C$, entonces F es la antiderivada de f , es decir, $F'(x) = f(x)$ y así

$$\int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = \frac{d}{dx} (F(x) + C) = F'(x) + (C)' = f(x)$$

De lo anterior, existe una estrecha relación entre la derivada y la integral de una función, como se muestra a continuación. Para la siguiente actividad, recordemos que $(F(x) + C)'$ es igual a $F'(x)$, por ejemplo:

$$(2x + C)' = (2x)' + (C)' = 2 \text{ y } (2x)' = 2.$$

Recordemos que para calcular la integral indefinida usamos $\int f(x) dx = F(x) + C$. Y para comprobar el resultado, lo que hacemos es verificar que $\frac{d}{dx}(F(x) + C) = f(x)$. Mediante este procedimiento, es como demostraremos las siguientes fórmulas de integración.

Fórmulas básicas de integrales

1. $\int k dx = kx + C, k \in R$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \neq 0$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$
6. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
7. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
8. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
9. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
10. $\int e^x dx = e^x + C$
11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0 \text{ y } a \neq 1$
12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsen \frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + C$

Fórmulas básicas de derivadas

1. $\frac{d}{dx}(kx) = k, k \in R$
2. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n, n \neq -1$
3. $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}, x \neq 0$
4. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
5. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
6. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
7. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
8. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
9. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$
10. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
11. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a, a > 0 \text{ y } a \neq 1$
12. $\frac{d}{dx}\left(\arctan \frac{x}{a}\right) = \frac{a}{a^2 + x^2}$
13. $\frac{d}{dx}\left(\arcsen \frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
14. $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arcsec} \frac{x}{a}\right) = \frac{a}{|x|\sqrt{x^2 - a^2}}$

Demostración:

1. $(kx + C)' = (kx)' + (C)' = k$, por lo tanto $\int k dx = kx + C$.
2. $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' + (C)' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$, por lo tanto $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
3. $(\ln|x| + C)' = (\ln|x|)' + (C)' = \frac{1}{x}$, por lo tanto $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

4. $(-\cos x + C)' = (-\cos x)' + (C)' = (-1)(\cos x)' = (-1)(-\sin x) = \sin x$, por lo tanto $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.
5. $(\sin x + C)' = (\sin x)' + (C)' = \cos x$, por lo tanto $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.
6. $(\tan x + C)' = (\tan x)' + (C)' = \sec^2 x$, por lo tanto $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$.
7. $(-\cot x + C)' = (-\cot x)' + (C)' = (-1)(\cot x)' = (-1)(-\csc^2 x) = \csc^2 x$, por lo tanto $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$.
8. $(\sec x + C)' = (\sec x)' + (C)' = \sec x \tan x$, por lo tanto $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$.
9. $(-\csc x + C)' = (-\csc x)' + (C)' = (-1)(\csc x)' = \csc x \cot x$, por lo tanto $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$.
10. $(e^x + C)' = (e^x)' + (C)' = e^x$, por lo tanto $\int e^x \, dx = e^x + C$.
11. $\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' + (C)' = \left(\frac{1}{\ln a}\right)(a^x)' = \frac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x$, por lo tanto $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.
12. $\left(\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C\right)' = \left(\frac{1}{a}\right)\left(\arctan \frac{x}{a}\right)' + (C)' = \frac{1}{a^2 + x^2}$, por lo tanto $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$.
13. $\left(\arcsen \frac{x}{a} + C\right)' = \left(\arcsen \frac{x}{a}\right)' + (C)' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, por lo tanto $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsen \frac{x}{a} + C$.
14. $\left(\frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + C\right)' = \left(\frac{1}{a}\right)\left(\operatorname{arcsec} \frac{x}{a}\right)' + (C)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - a^2}}$, por lo tanto $\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + C$.

La integral indefinida al igual que la derivada, presenta propiedades como extraer la constante fuera del signo de la integral, y la integral de una suma (resta) es la suma (resta) de las integrales. Además, se presenta la propiedad de cuando el integrando es de la forma $f(ax + b)$.

Teorema 4. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en un mismo intervalo cerrado, se cumplen en la integral indefinida las siguientes propiedades:

P1) Toda constante k que sea factor del integrando puede ponerse como factor fuera del signo de integración:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

P2) La integral de una suma (o resta) es igual a la suma (o resta) de la integral de cada uno de los sumandos:

$$\int (af(x) \pm bg(x)) \, dx = a \int f(x) \, dx \pm b \int g(x) \, dx$$

P3) Si $F(x)$ es una primitiva para $f(x)$, a y b constantes, entonces:

$$\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax + b)$$

Demostración

P1) Por definición $[\int kf(x)dx]' = kf(x)$, y $[k \int f(x)dx]' = k[\int f(x)dx]' = kf(x)$

Luego: $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$

P2) Por definición $[\int (af(x) \pm bg(x))dx]' = af(x) \pm bg(x)$, y

$$\begin{aligned}\left[a \int f(x) dx \pm b \int g(x) dx \right]' &= \left[a \int f(x) dx \right]' \pm \left[b \int g(x) dx \right]' \\ &= a \left[\int f(x) dx \right]' \pm b \left[\int g(x) dx \right]' \\ &= af(x) \pm bg(x)\end{aligned}$$

Luego: $\int (af(x) \pm bg(x))dx = a \int f(x) dx \pm b \int g(x)dx$

P3) Por definición $[\int f(ax + b)dx]' = f(ax + b)$.

Ahora, sea $F(x)$ una primitiva para $f(x)$, entonces:

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{a} F(ax + b) \right]' &= \frac{1}{a} [F(ax + b)]' \\ &= \frac{1}{a} (ax + b)' F'(ax + b) \text{ Aplicando regla de la cadena} \\ &= \frac{1}{a} a F'(ax + b) \\ &= f(ax + b)\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b)$$

Usaremos las fórmulas y propiedades de integración, para calcular integrales de manera directa.

Ejemplo formativo 3.2

1. Calcula las siguientes integrales aplicando las propiedades del teorema 4.

a) $\int 7x dx = 7 \int x dx$ Propiedad 1

$$= \frac{7x^2}{2} + C \text{ Fórmula 2}$$

b) $\int (x^5 + x - 1) dx = \int x^5 dx + \int x dx - \int dx$ Propiedad 2

$$= \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2} - x + C \quad \text{Fórmula 1 y 2}$$

$$c) \int e^{3x} dx = e^{3x} + C \quad \text{Propiedad 3}$$

$$d) \int 5^x + \sin(6x + 1) = \int 5^x dx + \int \sin(6x + 1) dx = \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{\cos(6x+1)}{6} + C$$

Reescribir el integrando antes de integrar

Antes de integrar, es útil reescribir algunas funciones usando técnicas simples de álgebra para hacer que la integración sea más fácil. Reescribiremos las expresiones que tienen exponentes en el denominador y las que incluyen radicales. En otros casos, realizamos las operaciones indicadas de multiplicación o división de la función dentro de la integral.

Ejemplo formativo 3.3

1. Calcula las siguientes integrales.

$$a) \int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{x^{-4}}{4} + C$$

$$b) \int \sqrt[4]{x^3} dx = \int x^{3/4} dx = \frac{x^{7/4}}{7/4} + C = \frac{4\sqrt[4]{x^7}}{7} + C = \frac{4x\sqrt[4]{x^3}}{7} + C$$

$$c) \int \frac{x^2 - 3x}{x} dx = \int \frac{x^2}{x} dx - \int \frac{3x}{x} dx = \int x dx - \int 3 dx = \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

$$d) \int (x+1)(x-3) dx = \int (x^2 - 2x - 3) dx = \int x^2 dx - \int 2x dx - \int 3 dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} - 3x + C = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + C$$

Hay funciones que antes de integrarlas, requieren de sustituir en ellas identidades trigonométricas y en otras, primero se debe reescribir la función para poder realizar dicha sustitución, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo formativo 3.4

1. Calcula las siguientes integrales.

$$a) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$b) \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} \right) dx = \int \cot x \csc x dx = -\csc x + C$$

$$c) \int \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) dx = \int \tan x \sec x dx = \sec x + C$$

Evaluación formativa 3.1

1. Reescribe las siguientes integrales separando la diferencial dr , dt o dx del integrando.

- a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ se puede escribir como _____
- b) $\int \frac{dt}{2}$ se puede escribir como _____
- c) $\int \frac{x dx}{1+x^2}$ se puede escribir como _____
- d) $\int \frac{dr}{e^{-r}}$ se puede escribir como _____

2. Reescribe las siguientes integrales agregando la diferencial ds , dw o dx en el integrando.

- a) $\int \frac{1}{5+x} dx$ se puede escribir como _____
- b) $\int \frac{1}{\sqrt{s}} ds$ se puede escribir como _____
- c) $\int \frac{2}{x} dx$ se puede escribir como _____
- d) $\int \frac{1}{w^{-2}} dw$ se puede escribir como _____

3. A partir de las derivadas que aparecen a continuación, escribe la correspondiente notación como integrales indefinidas.

Derivada	Integral
a) $\frac{d}{dr} \left(\frac{r^4}{4} \right) = r^3$	$\int r^3 dr = \frac{r^4}{4} + C$
b) $\frac{d}{dw} (w) = 1$	_____
c) $\frac{d}{dt} \left(\frac{5^t}{\ln 5} \right) = 5^t$	_____
d) $\frac{d}{dx} (e^x) = e^x$	_____

4. A partir de las integrales indefinidas que aparecen a continuación, escribe la correspondiente notación como derivadas.

Integral	Derivada
a) $\int 2ds = 2s + C$	$\frac{d}{ds} (2s + C) = 2$
b) $\int \csc t \cot t dt = -\csc t + C$	_____
c) $\int \cos x dx = \sin x + C$	_____
d) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$	_____
e) $\int e^w dw = e^w + C$	_____

5. Calcula las siguientes integrales.

- a) $\int (3x^6 - 2x^2 + 7x + 1) dx$
- b) $\int \frac{t^2 - 2t^4}{t^4} dt$
- c) $\int \sin(5x + 7) dx$
- d) $\int e^{3x-2} dx$

$$\text{e) } \int \left(\sin(2x + 1) + \frac{x-2}{x} - 4^x \right) dx$$

$$\text{f) } \int (x(x+3) - 5 \sec^2 x - 3e^{6x-1}) dx$$

$$\text{g) } \int \frac{x+2\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{h) } \int \frac{3}{\sqrt{9-t^2}} dt$$

$$\text{i) } \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x} dx$$

$$\text{j) } \int \cos 2x dx$$

$$\text{k) } \int \frac{3x+1}{x-3} dx$$

$$\text{sugerencia: } 3x+1 = 3(x-3) + 10$$

$$\text{l) } \int \frac{t^2}{t^2+1} dt$$

$$\text{sugerencia: } \frac{t^2}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{t^2+1}$$

$$\text{m) } \int (2x+3)\sqrt{x-4} dx$$

$$\text{sugerencia: } 2x+3 = 2(x-4) + 11$$

$$\text{n) } \int \sqrt{1 + \sin 2x} dx$$

$$\text{sugerencia: } 1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$$

PA 4. Método de sustitución o de cambio de variable

Progresión de aprendizaje 4

Aplica diversos métodos de integración, incluyendo propiedades de la integración y el método de sustitución o de cambio de variable para funciones algebraicas al resolver integrales, evaluando la eficacia de cada método en diferentes contextos.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

En progresiones anteriores estudiamos el concepto de integral indefinida, así como sus propiedades básicas, y aplicando la definición de integral se obtuvieron fórmulas de integrales indefinidas como primitivas de funciones racionales o trascendentes.

En esta progresión continuaremos ampliando las fórmulas de integrales indefinidas inmediatas con la finalidad de que este conocimiento y las propiedades básicas de la integración, permitan abordar diferentes métodos de integración.

Las propiedades de la integración estudiadas se pueden resumir como:

P₁) Si k es una constante, $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$.

P₂) $(\int a \cdot f(x) \pm b \cdot g(x)) dx = a \int f(x) dx \pm b \int g(x) dx$, a y b constantes.

P₃) $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b)$, si $F'(x) = f(x)$.

También conoces que, de acuerdo con la definición de integral indefinida, primitiva o antiderivada, se tiene que $F(x)$ es una primitiva de una función $f(x)$ si y sólo si $F'(x) = f(x)$ y de forma general, que si C es una constante arbitraria.

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ si y sólo si } (F(x) + C)' = f(x)$$

Consideremos la función $f(x) = \ln |\cot x|$, con $u(x) = \cos x$, $x \neq k\pi/2$ y k , entero impar, aplicando la regla de la cadena tenemos

$$(\ln |\cos x|)' = \frac{1}{|\cos x|} (|\cos x|)' = \frac{1}{|\cos x|} \left(\frac{\cos x}{|\cos x|} \right) (\cos x)' = \frac{\cos x (-\sin x)}{|\cos^2 x|} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

Por tanto, podemos concluir que $\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C$.

Análogamente se puede demostrar que $\int \cot x \, dx = -\ln |\sin x| + C$.

Método de sustitución o cambio de variable

Hasta el momento, se calcularon primitivas de una función a partir de las integrales inmediatas o de las propiedades estudiadas. Sin embargo, estos procedimientos, por sí solos, no permiten obtener la primitiva de muchas funciones de forma inmediata. Es por ello que es importante disponer de técnicas para hallar antiderivadas y existen métodos de integración que permiten, mediante cálculos obtener la primitiva de una función.

Como ya conoces del curso de Cálculo Diferencial, para calcular la derivada de muchas funciones se requiere aplicar la regla de la cadena. El método de sustitución o cambio de variable para encontrar la integral indefinida de una función, que vamos a estudiar a continuación, es un proceso que está dirigido a identificar cuándo el integrando es una función derivada de otra que se ha obtenido aplicando la regla de la cadena, por ejemplo, calcular $\int 2xe^{(x^2+1)} \, dx$.

Observa que en la función integrando $f(x) = 2xe^{(x^2+1)}$, el factor $2x$ es la derivada del exponente de la función exponencial y ello significa haber derivado la función aplicando la regla de la cadena. Vamos a introducir ahora un cambio de variable que permita simplificar el integrando. Hacemos $u(x) = x^2 + 1$. Entonces $du = 2x \, dx$ y por tanto, si hacemos las sustituciones correspondientes,

$$\int 2xe^{(x^2+1)} \, dx = \int e^{(x^2+1)} 2x \, dx = \int e^u \, du = e^u + C = e^{(x^2+1)} + C$$

Consideremos ahora la función $f(x) = \cot x$, ya vimos anteriormente que $\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C$, comprobando que la derivada de $\ln |\sin x| + C$ es $\cot x$. Veamos cómo podemos obtener ese mismo resultado sin proceder de la forma anterior.

$$\text{Como } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \text{ entonces } \int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$$

En la función integrando el numerador es la derivada del denominador. Introducimos el cambio de variable $u(x) = \sin x$, luego

$$du = (\sin x)' \, dx = \cos x \, dx.$$

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{1}{\sin x} \cos x \, dx = \int \frac{1}{u} \, du = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$$

Observa que el integrando se corresponde con la derivada de la función compuesta $\ln u$, donde $u(x) = \sin x$.

En el caso de calcular ahora $\int \frac{x}{2x^2 + 1} \, dx$, podemos apreciar que en el numerador está "casi" la derivada del denominador y podemos lograr que sea la derivada multiplicando por 1 en la forma 4/4.

$$\int \frac{x}{2x^2 + 1} \, dx = \frac{4}{4} \int \frac{x}{2x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x}{2x^2 + 1} \, dx$$

Ahora hacemos el cambio de variable $u(x) = 2x^2 + 1$, entonces

$$du = (2x^2 + 1)' \, dx = 4x \, dx$$

$$\int \frac{x}{2x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x}{2x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{u} \, du = \frac{1}{4} \ln u + C = \frac{1}{4} \ln(2x^2 + 1) + C$$

El propósito principal del método de sustitución o cambio de variable es sustituir el cálculo de una integral indefinida relativamente compleja por el cálculo de una más sencilla. Para ello, vamos a esbozar los pasos generales a aplicar en este método.

Pasos para la integración por cambio de variable o sustitución

1. Identifica si el integrando es una expresión de un producto o cociente que se obtiene de una composición de funciones o es una parte y en ese caso ver si es posible completarla.
2. Selecciona una parte adecuada de la expresión del integrando para la variable u .
3. Calcula $du = u'(x) \, dx$.
4. Reemplaza en el integrando original todos los términos con las expresiones que involucren a u y du .
5. Calcula la integral resultante en función de la variable u .
6. Reemplaza todos los términos en u de la primitiva por las correspondientes expresiones en x .
7. Comprueba, derivando, que el resultado es correcto.

Ejemplo formativo 4.1

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \sin^3 x \cos x \, dx$

b) $\int \frac{x^2}{x^3 + 1} \, dx$

Resolución

a) $\int \sin^3 x \cos x \, dx$

Como la derivada de $\sin x$ es $\cos x$, hacemos $u(x) = \sin x$, luego

$$du = (\sin x)' \, dx = \cos x \, dx$$

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$$

$$\text{Comprobando: } \left(\frac{1}{4} \sin^4 x + C \right)' = \left(\frac{1}{4} \right) 4 \sin^3 x (\cos x) = \sin^3 x \cos x$$

b) $\int \frac{x^2}{x^3 + 1} \, dx$

Hacemos $u(x) = x^3 + 1$, luego $du = 3x^2 \, dx$.

Por tanto

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 1} \, dx = \frac{1}{3} \int \frac{x^2}{x^3 + 1} \, dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3 + 1} \, dx = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln|u| + C = \frac{1}{3} \ln|x^3 + 1| + C$$

$$\text{Si derivamos, para comprobar, } \left(\frac{1}{3} \ln|x^3 + 1| + C \right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{x^3 + 1} = \frac{x^2}{x^3 + 1}.$$

A partir de los ejemplos podemos enunciar de forma general el método o regla de sustitución:

Regla del cambio de variable o sustitución

Si $u(x) = g(x)$ es una función derivable cuyo rango es un intervalo I y $f(x)$ es continua sobre I , entonces

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = \int f(u) \, du$$

En efecto, si $u(x) = g(x)$ entonces $du = g'(x) \, dx$. Sustituyendo

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = \int f(u) \, du.$$

Vamos a analizar un caso específico del método o regla de sustitución a partir de ejemplos.

Ejemplo formativo 4.2

1. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int (x + 5)^2 dx$

b) $\int 2x(x^2 + 5)^2 dx$

Resolución

a) $\int (x + 5)^2 dx$

Si se hace $u = x + 5$, entonces $du = dx$.

$$\int (x + 5)^2 dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(x + 5)^3}{3} + C$$

Lo que es fácil de comprobar derivando.

b) $\int 2x(x^2 + 5)^2 dx$

En este caso $u = x^2 + 5$ y $du = 2x dx$ y

$$\int 2x(x^2 + 5)^2 dx = \int (x^2 + 5)^2 2x dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(x^2 + 5)^3}{3} + C$$

Derivando podemos comprobar:

$$\left(\frac{(x^2 + 5)^3}{3} + C \right)' = \frac{3(x^2 + 5)^2}{3} (2x) = 2x(x^2 + 5)^2$$

En general si $f(x)$ es diferenciable y $n \neq -1$.

$$\int f'(x) [f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

En efecto, si $u(x) = f(x)$, $du = f'(x) dx$ y

$$\int f'(x) [f(x)]^n dx = \int [f(x)]^n f'(x) dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$$

Si $n = -1$ y haciendo también $u(x) = f(x)$

$$\int f'(x) [f(x)]^{-1} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C$$

Entonces podemos concluir que si $f(x)$ es una función diferenciable

$$\int f'(x) [f(x)]^n dx = \begin{cases} \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C, & \text{si } n \neq -1 \\ \ln|f(x)| + C, & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

Ejemplo formativo 4.3

1. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int (x+1)^5 dx$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

c) $\int x^2(x^3+1)^2 dx$

d) $\int \frac{2x}{2x^2-3} dx$

e) $\int \frac{(2\ln x - 3)^3}{3x} dx$

f) $\int \sin^3 x dx$

g) $\int \frac{dx}{x^2 + 10x + 25}$

h) $\int 2 \sin x \cos x dx$

Resolución

a) $\int (x+1)^5 dx = \frac{(x+1)^6}{6} + C$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-2/3} dx = \frac{x^{1/3}}{1/3} + C = 3x^{1/3} + C$

En efecto, $(3x^{1/3} + C)' = 3 \cdot \frac{1}{3} x^{1/3-1} = x^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

c) $\int x^2(x^3+1)^2 dx = \frac{1}{3} \int 3x^2(x^3+1)^2 dx = \frac{1}{3} \int (x^3+1)^2 3x^2 dx = \frac{(x^3+1)^3}{9} + C$

Comprobando $\left(\frac{(x^3+1)^3}{9} + C\right)' = \frac{3(x^3+1)^2 \cdot 3x^2}{9} = x^2(x^3+1)^2$

d) $\int \frac{2x}{2x^2-3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{4x}{2x^2-3} dx = \frac{1}{2} \ln|2x^2-3| + C$

Si se comprueba: $\left(\frac{1}{2} \ln|2x^2-3| + C\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x}{2x^2-3} = \frac{2x}{2x^2-3}$

e) $\int \frac{(2\ln x - 3)^3}{3x} dx$

Si hacemos $u = 2\ln x - 3$, entonces $du = \frac{2}{x} dx$.

$$\int \frac{(2\ln x - 3)^3}{3x} dx = \frac{1}{3 \cdot 2} \int \frac{(2\ln x - 3)^3 \cdot 2}{x} dx = \frac{1}{6} \int u^3 du = \frac{1}{6} \cdot \frac{u^4}{4} + C = \frac{(2\ln x - 3)^4}{24} + C$$

Comprobando: $\left(\frac{(2\ln x - 3)^4}{24} + C\right)' = \frac{4}{24} (2\ln x - 3)^3 \left(\frac{2}{x}\right) = \frac{(2\ln x - 3)^3}{3x}$

f) $\int \sin^3 x dx$

En ocasiones para aplicar el método de sustitución se requiere hacer transformaciones previas en el integrando, como en el cálculo de $\int \sin^3 x dx$ y para ello vamos a utilizar la identidad trigonométrica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x dx = \int \sin x dx - \int \cos^2 x \cdot \sin x dx$$

La primera de estas dos integrales es inmediata, pues $\int \sin x dx = -\cos x + C_1$.

Para la segunda hacemos $u = \cos x$, de donde $du = -\sin x dx$ y por tanto

$$\int \cos^2 x \cdot \sin x dx = - \int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C_2$$

Entonces

$$\int \sin^3 x \, dx = -\cos x + C_1 - \left(-\frac{\cos^3 x}{3} + C_2\right) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C, \text{ con } C = C_1 + C_2$$

Comprobando:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C\right)' &= \frac{3}{3} \cos^2 x \cdot (-\sin x) - (-\sin x) = -\sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x \\ &= \sin^3 x \end{aligned}$$

g) $\int \frac{dx}{x^2 + 10x + 25}$

Para calcular $\int \frac{dx}{x^2 + 10x + 25}$ observa que $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$, luego

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 10x + 25} &= \int \frac{dx}{(x + 5)^2} = \int (x + 5)^{-2} dx = \frac{(x + 5)^{-1}}{-1} + C \\ &= -(x + 5)^{-1} + C \end{aligned}$$

h) $\int 2 \sin x \cos x \, dx$

No siempre existe una única vía para hacer el cambio de variable por el método de sustitución, lo que reafirma la importancia de la comprobación como último paso del procedimiento.

a) Sea $u = \sin x$, $du = \cos x$

$$\int 2 \sin x \cos x \, dx = 2 \int u \, du = \frac{2u^2}{2} + C = \sin^2 x + C$$

b) Sea $u = \cos x$, $du = -\sin x$

$$\begin{aligned} \int 2 \sin x \cos x \, dx &= -2 \int \cos x (-\sin x) dx = -2 \int u \, du = -\frac{2u^2}{2} + C \\ &= -\cos^2 x + C \end{aligned}$$

c) Como $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, entonces

$$\int 2 \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$$

¿Son estos tres resultados válidos? Comprueba y explica tu respuesta.

Evaluación formativa 4.1

1. Para calcular $\int \cos^2 x \sin x \, dx$ por el método de sustitución, ¿cuál cambio de variable harías $u(x) = \cos x$ o $u(x) = \sin x$? Explica tu respuesta y calcula la integral.

2. Calcula las siguientes integrales indefinidas y comprueba tu resultado.

a) $\int (2x + 5)^{10} dx$

b) $\int (x + 1)^{3/5} dx$

c) $\int x(5x^2 - 3)^5 dx$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$

e) $\int \frac{3e^{2/x}}{x^2} dx$

f) $\int x^2 e^{-x/2} dx$

g) $\int (xe^{(x^2+1)} - 3) dx$

h) $\int e^x \sin e^x \, dx$

i) $\int x^4 \sin(x^5 + 5) \, dx$

j) $\int \sin^3 x \cos x \, dx$

k) $\int \cot^2 x \sec x \, dx$

l) $\int \sec^2 x \tan^2 x \, dx$

m) $\int \frac{\ln 2x}{2x} dx$

n) $\int \frac{x}{\sin^2 x^2} dx$

ñ) $\int x\sqrt{5+2x} \, dx$

PA 5. Método de integración por partes

Progresión de aprendizaje 5

Valora la aplicabilidad del método de integración por partes, desarrollando criterios para seleccionar el método más apropiado en diferentes tipos de integrales y justificando su elección.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	A			
	C			
	H			
M3-C4 Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o evaluación.	A			
	C			
	H			

Como podrás suponer, no en todos los casos es posible obtener la integral indefinida de una función a partir de las integrales inmediatas o mediante la aplicación del método de sustitución o cambio de variable.

Si nos proponemos, por ejemplo, calcular $\int x \sen x \, dx$ podemos apreciar que no se corresponde con ninguna integral inmediata, ni el integrando permite aplicar la regla de la sustitución. Es por eso que vamos a estudiar otro método de integración que nos va a permitir ampliar las vías para calcular una integral indefinida.

Al estudiar la regla de sustitución vimos que esta se corresponde con la regla de la cadena para la diferenciación. De manera general cada regla de derivación se corresponde con una regla de integración. El método que vamos a estudiar a continuación se corresponde con la derivación del producto de funciones y se le denomina integración por partes.

La regla de la derivada del producto de dos funciones establece que, si f y g son funciones derivables, entonces

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$$

Si integramos en cada lado de esta igualdad y aplicamos la propiedad P₂ de la integración obtenemos

$$\int [f(x) \cdot g(x)]' dx = \int f(x) \cdot g'(x) dx + \int f(x)' \cdot g(x) dx$$

Como sabes, una primitiva de la derivada de una función derivable es la propia función (considerando la constante $C = 0$), luego el primer término de la igualdad anterior es el producto de las dos funciones f y g . Es decir

$$f(x) \cdot g(x) = \int f(x) \cdot g'(x) dx + \int f(x)' \cdot g(x) dx$$

O bien

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x)' \cdot g(x) dx.$$

Esta es la expresión de la regla de la integración por partes, que podemos escribir de forma más abreviada haciendo $u = f(x)$ y $v = g(x)$. De esa forma, como $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$,

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Integración por partes

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables tales que sus derivadas son funciones continuas, entonces

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx.$$

O bien, si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ se tiene que $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$ y se escribe

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Ejemplo formativo 5.1

1. Calcula la integral $\int x \operatorname{sen} x dx$.

Resolución

Como ya vimos $\int x \operatorname{sen} x dx$ no es ninguna integral inmediata ni podemos utilizar el método de sustitución, por lo que vamos a intentar por la integración por partes, ya que aparece el producto de dos funciones.

Para seleccionar quien es u y quien v tenemos dos posibilidades:

a) Si hacemos $u = x$ y $dv = \operatorname{sen} x dx$, entonces $du = 1 \cdot dx$ y $v = -\cos x$.

En ese caso, si sustituimos en la expresión $\int u dv = uv - \int v du$, se tiene

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen} x dx &= -x \cos x - \int (1)(-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C. \end{aligned}$$

Si comprobamos:

$$(-x \cos x + \sin x + C)' = -\cos x - x(-\sin x) + \cos x = x \sin x.$$

b) Si hacemos $u = \sin x$ y $dv = x dx$, entonces $du = \cos x dx$ y $v = \frac{x^2}{2}$ y sustituyendo

$$\int x \sin x dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos x dx$$

La expresión $\int \frac{x^2}{2} \cos x dx$ no es una integral inmediata, ni podemos aplicar el método de sustitución, pues ninguna de las funciones del producto se identifica, ni puede lograrse, como derivada de la otra. Por tanto, la opción b) no facilita calcular la integral buscada.

Este ejemplo nos muestra que al aplicar la integración por partes hay que lograr una selección adecuada de las funciones u y v . Como regla general, se selecciona como dv la función que tenga una primitiva conocida o relativamente fácil de obtener, aunque sólo a través de la ejercitación se logra identificar una selección conveniente.

Ejemplo formativo 5.2

1. Calcula la integral $\int x e^x dx$ aplicando la integración por partes.

Resolución

$u = x$ $dv = e^x dx$	$u = x$ $v = e^x$	$v = e^x$ $du = (1) dx$
--------------------------	----------------------	----------------------------

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= x e^x - \int e^x (1) dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C \\ &= e^x (x - 1) + C \end{aligned}$$

Si comprobamos

$$(e^x (x - 1) + C)' = e^x (x - 1) + e^x (1) + e^x (x - 1 + 1) = x e^x$$

Si hubiéramos hecho $u = e^x$ y $dv = x dx$, entonces $du = e^x dx$ y $v = \frac{x^2}{2}$. En ese caso

$$\int x e^x dx = x e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx$$

y la nueva integral obtenida es más complicada que la de origen, al aumentar el grado del monomio.

En este tipo de integrales es importante seleccionar como u el factor que sea una expresión polinomial, en este caso $u = x$, para reducir el grado del polinomio, dado que, además, e^x se mantiene igual al pasar de dv a v .

Ejemplo formativo 5.3

1. Calcula la integral $\int x^2 e^x dx$ aplicando la integración por partes.

Resolución

$u = x^2$ $dv = e^x dx$	$u = x^2$ $v = e^x$	$v = e^x$ $du = 2x dx$
----------------------------	------------------------	---------------------------

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int (2x) e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

La nueva integral $\int x e^x dx$ es la que acabamos de calcular en el Ejemplo formativo 6.2 (de no haberlo hecho, habría que calcularla a continuación). Así, se obtiene

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2[e^x(x-1) + C] = x^2 e^x - 2e^x(x-1) + C_1$$

Donde $C_1 = -2C$.

Comprobando:

$$(x^2 e^x - 2e^x(x-1) + C_1)' = 2x e^x + x^2 e^x - 2e^x(x-1) - 2e^x(1) = x^2 e^x$$

Vamos a analizar a continuación un ejemplo en el que el factor que acompaña al polinomio en el integrando no es una función exponencial y la estrategia a seguir es diferente, ya que entonces conviene seleccionar al polinomio como la expresión dv .

Ejemplo formativo 5.4

1. Calcula la integral $\int x \ln x dx$ aplicando la integración por partes.

Resolución

Para calcular $\int x \ln x dx$ mediante la integración por partes, tengamos en cuenta que para determinar v hay que poder integrar dv . Por eso se selecciona

$$u = \ln x \text{ y } dv = x dx, \text{ luego } du = \frac{1}{x} dx \text{ y } v = \frac{x^2}{2}.$$

Entonces

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Comprobando:

$$\left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C \right)' = \frac{2x}{2} \ln x + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{2x}{4} = x \ln x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x \ln x$$

Ejemplo formativo 5.5

1. Calcula la integral $\int x^2 \ln x \, dx$ aplicando la integración por partes.

Resolución

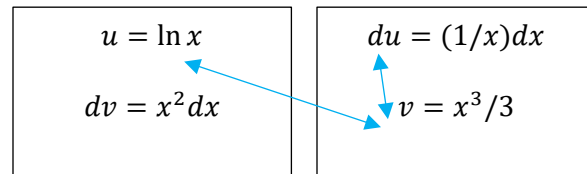
En el cálculo de $\int x^2 \ln x \, dx$, lo vamos a ilustrar en un esquema que puede ser de utilidad para realizar los cambios en el método de integración por partes. Como ya apreciamos en el Ejemplo formativo 6.4, es conveniente tomar $u = \ln x$ cuya derivada conocemos.

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

$$= \frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C$$

Producto de funciones



Integrando inicial

Integrando de la
nueva integral a
calcular

Comprobando:

$$\left(\frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C \right)' = \frac{3x^2}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} = x^2 \ln x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} = x^2 \ln x$$

Cuando en la integración por partes se obtiene, como en este caso, un resultado con la misma integral que se quiere calcular, se dice que es una integral cíclica.

Ejemplo formativo 5.6

1. Calcula la integral $\int e^x (x^2 - 2x - 1) \, dx$ aplicando la integración por partes.

Resolución

Cuando uno de los factores es un polinomio, en general se toma como la función u , como ya vimos en ejemplos anteriores, ya que al calcular du se disminuye el grado del polinomio en uno y puede obtenerse una integral más fácil de calcular o requerirse volver a aplicar la integración por partes con el mismo criterio de tomar el nuevo polinomio como la función u para seguir disminuyendo el grado del polinomio resultante.

$$\text{Si se hace: } u = x^2 - 2x - 1 \quad du = (2x - 2)dx$$

$$dv = e^x dx \quad v = e^x$$

Aplicando la integración por partes, se obtiene

$$\int e^x(x^2 - 2x - 1) dx = e^x(x^2 - 2x - 1) - \int e^x(2x - 2)dx$$

Ahora nuevamente: $u = 2x - 2 \quad du = 2dx$

$$dv = e^x dx \quad v = e^x$$

Entonces, sustituyendo en la integral del miembro derecho de la igualdad

$$\begin{aligned} \int e^x(x^2 - 2x - 1) dx &= e^x(x^2 - 2x - 1) - \left[e^x(2x - 2) - 2 \int e^x dx \right] \\ &= e^x(x^2 - 2x - 1) - [e^x(2x - 2) - 2e^x] + C \\ &= e^x(x^2 - 2x - 1 - 2x + 2 + 2) + C \\ &= e^x(x^2 - 4x + 3) + C \end{aligned}$$

Comprobando:

$$(e^x(x^2 - 4x + 3) + C)' = e^x(x^2 - 4x + 3) + e^x(2x - 4) = e^x(x^2 - 2x - 1)$$

Si bien, no hay una regla general para aplicar el método de integración por partes, podemos esbozar pasos generales a tener en cuenta, aunque es necesario insistir que, resolviendo una cantidad apreciable de ejercicios por esta vía, es que aprenderás esta técnica.

Pasos a tener en cuenta para aplicar la integración por partes

1. Identifica el integrando como el producto de dos funciones.
2. Elige como dv una función que se pueda integrar más fácilmente.
3. Incluye dx como parte de dv .
4. Sin que tenga un carácter estricto, en general identifica como u , cuando existan, las funciones trigonométricas inversas, logarítmicas, algebraicas, trigonométricas y las exponenciales, en ese orden, y como dv el complemento de lo que esté en el integrando.

Evaluación formativa 5.1

1. Calcula la integral $\int x^3 e^{x^2} dx$ aplicando la integración por partes.

Resolución

Vamos a analizar el integrando para ver si podemos utilizar la integración por partes. La derivada del exponente de la función exponencial es $2x$. Para tener $2x$ como un factor dentro del integrando realizamos primero la siguiente transformación.

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \int x^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int x^2 \cdot 2x e^{x^2} dx$$

Hecho esto, selecciona

$u =$ _____, $dv =$ _____ y por tanto $du =$ _____ y $v =$ _____

Entonces

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \text{_____} = \frac{e^{x^2}}{2} (x^2 - 1) + C$$

Comprueba:

$$\left(\frac{e^{x^2}}{2} (x^2 - 1) + C \right)' =$$

2. Calcula la integral $\int e^x \cos x dx$ aplicando la integración por partes.

Resolución

Podemos identificar en el integrando el producto de dos funciones. Hacemos

$$\begin{aligned} u &= e^x & du &= \text{_____} \\ dv &= \cos x dx & v(x) &= \text{_____} \end{aligned}$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

Puedes apreciar que la integral obtenida tiene una complejidad similar que la inicial y que el integrando es nuevamente el producto de dos funciones, por lo que volvemos a aplicar la integración por partes. Hacemos

$$\begin{aligned} u(x) &= \text{_____} & du &= \text{_____} \\ dv &= \text{_____} & v(x) &= \text{_____} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x dx &= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - [e^x (-\cos x) - \int e^x (-\cos x) dx] \\ &= \text{_____} = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx \end{aligned}$$

Como puedes apreciar, la última integral obtenida es igual a la integral inicial que se quiere calcular, por tanto, si despejamos

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C$$

Comprueba:

$$\left(\frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C \right)' =$$

3. Calcula la integral $\int e^x(x^3 + 1) \, dx$ aplicando la integración por partes.

Resolución

Si te fijas, en el integrando podemos aplicar la propiedad P_2 de la suma, luego

$\int e^x(x^3 + 1) \, dx = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$. La segunda integral es inmediata, veamos la primera.

En $\int x^3 e^x \, dx$, hacemos $u(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ luego $du = \underline{\hspace{2cm}}$,

y $dv = \underline{\hspace{2cm}}$ luego $v(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Según la integración por partes, $\int x^3 e^x \, dx = \underline{\hspace{4cm}}$

De nuevo aplicamos el método: $u(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ y $dv = \underline{\hspace{2cm}}$,

luego $du = \underline{\hspace{2cm}}$ y $v(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Entonces $\int x^3 e^x \, dx = \underline{\hspace{4cm}}$

La última integral resultante se calculó en el Ejemplo formativo 6.2 o puedes también aplicar nuevamente el método de sustitución, luego

$\int x^3 e^x \, dx = \underline{\hspace{4cm}}$

Si volvemos a la integral original y a la igualdad con los dos sumandos, al sustituir:

$\int e^x(x^3 + 1) \, dx = \underline{\hspace{4cm}}$

Comprueba tu resultado:

4. Calcula las siguientes integrales aplicando la integración por partes.

a) $\int e^x \cos 2x \, dx$

b) $\int x \cos 3x \, dx$

c) $\int x^3 \sin x \, dx$

d) $\int x\sqrt{x-2} \, dx$

e) $\int (x+1)e^x \, dx$

f) $\int x \ln^2 x \, dx$

g) $\int x^2 \cos x \, dx$

h) $\int \cos(\ln 2x) \, dx$

i) $\int x \sec^2 x \, dx$

5. Para resolver la integral $\int e^{2x} \sin x \, dx$ mediante la integración por partes, en una sesión de estudios, Rolando propone hacer $u(x) = e^{2x}$ y $d(v) = \sin x \, dx$, mientras que Alberto sugiere $u(x) = \sin x$ y $d(v) = e^{2x} \, dx$. ¿Qué camino seguirás tú? ¿Son ambos posibles? Argumenta tu respuesta.

Integración por sustitución trigonométrica

Progresión de aprendizaje 6

Aplica estrategias de integración por sustitución trigonométrica, analizando los diferentes casos y justificando el proceso de selección de la sustitución adecuada.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

Hasta ahora, has calculado integrales que incluyen funciones trigonométricas en el integrando, así como primitivas del producto o composición de funciones trigonométricas. También has abordado integrales que, al transformar el integrando, permiten aplicar fórmulas de integración con funciones trigonométricas o sus inversas. A continuación, vamos a calcular una integral por sustitución que resulta en una función trigonométrica.

Ejemplo formativo 6.1

1. Calcula $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx$

Resolución

Primero, evalúa si puede resolverse directamente o mediante alguno de los métodos estudiados.

Como $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(e^x)^2-1}} dx$, lo anterior sugiere la sustitución $u(x) = e^x$, luego $du = e^x dx = u dx$. Si sustituyes, se tiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{1}{u} du = \int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} du$$

El integrando se corresponde con la derivada de la función $\operatorname{arccsc} u$, luego

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} du = \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{1} + C = \operatorname{arcsec}(e^x) + C$$

Comprueba:

$$(\operatorname{arcsec}(e^x) + C)' = \frac{1}{e^x \sqrt{(e^x)^2 - 1}} e^x = \frac{1}{\sqrt{(e^x)^2 - 1}}$$

Mientras continuamos presentando ejemplos de este tipo de situaciones, también calcularemos integrales que incluyen expresiones de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ o $\sqrt{x^2 - a^2}$. En muchos casos, estas integrales pueden resolverse mediante una sustitución que involucre una función trigonométrica o a partir de las primitivas de las funciones trigonométricas inversas.

En el método de sustitución trigonométrica para resolver integrales indefinidas, a veces será necesario un procedimiento adicional para completar el cálculo de las primitivas de una función, como se ilustrará en varios ejemplos.

Comenzamos con una situación del tipo $\sqrt{a^2 - x^2}$, en la que a menudo se puede utilizar la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$. Sin embargo, siempre es necesario analizar cuál es el cambio de variable más adecuado.

Ejemplo formativo 6.2

1. Calcula $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{9-x^2}} dx$.

Resolución

Observa que esta integral no se puede calcular de forma inmediata, ni mediante una sustitución conocida, ni por partes. Para eliminar el factor de la raíz cuadrada, nota que un factor del integrando, donde aparece la expresión $\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$, puede transformarse rápidamente si haces $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, con $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, de donde $dx = 3 \cos \theta d\theta$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 \sqrt{9-x^2}} dx &= \int \frac{3 \cos \theta}{(3 \operatorname{sen} \theta)^2 \sqrt{9 - (3 \operatorname{sen} \theta)^2}} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{3 \operatorname{sen}^2 \theta \sqrt{3^2 - 3^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} d\theta \\ &= \int \frac{\cos \theta}{3 \operatorname{sen}^2 \theta \sqrt{3^2(1-\operatorname{sen}^2 \theta)}} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{(3 \operatorname{sen}^2 \theta) 3 \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 \theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{9} \int \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta \cdot \cos \theta} d\theta = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} d\theta = \frac{1}{9} \int \csc^2 \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{9} \cot \theta + C \end{aligned}$$

Sin embargo, aún no has concluido, ya que el resultado está en la variable θ . Para obtener el resultado en la variable x es necesario considerar que la función trigonométrica que aparece en el resultado es la cotangente, mientras que el cambio

de variable se realizó con la función seno. No obstante, gracias a la trigonometría, conoces cómo relacionar estas dos funciones aplicando el teorema de Pitágoras.

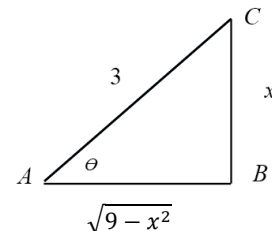
Si ABC es un triángulo rectángulo en B (ver figura de la derecha), entonces

como $x = 3 \sin \theta$, $\sin \theta = \frac{x}{3}$, de donde $BC = x$ y $AC = 3$.

Ahora, aplicando el teorema de Pitágoras $AB = \sqrt{9 - x^2}$.

Entonces $\cot \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$ y, por tanto

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{9-x^2}} dx = -\frac{1}{9} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C$$



Comprueba:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{9} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C \right)' &= -\frac{1}{9} \left[\frac{\frac{1}{2}(9-x^2)^{-1/2}(-2x)(x) - (\sqrt{9-x^2})(1)}{x^2} \right] \\ &= -\frac{1}{9} \left[\frac{-x^2 - (9-x^2)}{x^2 \sqrt{9-x^2}} \right] = \frac{1}{x^2 \sqrt{9-x^2}} \end{aligned}$$

Consideremos ahora un ejemplo correspondiente a la forma $\sqrt{a^2 + x^2}$, caso en que, de forma general, se utiliza la sustitución $x = a \tan \theta$.

Ejemplo formativo 6.3

1. Calcula $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+16}} dx$.

Resolución

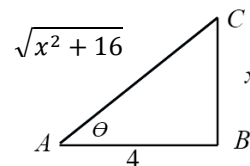
Para ello utiliza la sustitución $x = 4 \tan \theta$, por lo que $dx = 4 \sec^2 \theta d\theta$.

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+16}} dx &= \int \frac{4 \sec^2 \theta}{\sqrt{16 \tan^2 \theta + 16}} d\theta = \frac{4}{4} \int \frac{\sec^2 \theta}{\sqrt{\tan^2 \theta + 1}} d\theta \\ &= \int \frac{\sec^2 \theta}{\sqrt{\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}}} d\theta = \int \frac{\sec^2 \theta}{\frac{1}{\cos \theta}} d\theta = \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec \theta} d\theta = \int \sec \theta d\theta \end{aligned}$$

Pero $\int \sec \theta d\theta = \ln|\tan \theta + \sec \theta| + C$. Así

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 16}} dx = \int \sec \theta d\theta = \ln|\tan \theta + \sec \theta| + C.$$



En el triángulo rectángulo ABC , rectángulo en B , como $x = 4 \tan \theta$,

entonces $AB = 4$ y $BC = x$. Por el teorema de Pitágoras $AC = \sqrt{x^2 + 16}$,

$\tan \theta = \frac{x}{4}$ y $\sec \theta = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{4}$ y, por tanto, sustituyendo

$$\int \sec \theta d\theta = \ln|\tan \theta + \sec \theta| + C = \ln \left| \frac{x}{4} + \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{4} \right| + C = \ln \left| \frac{1}{4} + (x + \sqrt{x^2 + 16}) \right| + C$$

Comprueba:

$$\begin{aligned} \left(\ln \left| \frac{1}{4} + (x + \sqrt{x^2 + 16}) \right| + C \right)' &= \frac{1}{\frac{1}{4}(x + \sqrt{x^2 + 16})} \cdot \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 16}}(2x) \right) \\ &= \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + 16})} \cdot \left(\frac{(x + \sqrt{x^2 + 16})}{(\sqrt{x^2 + 16})} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 16}} \end{aligned}$$

Ejemplo formativo 6.4

1. Calcula $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Resolución

Nota que en este caso aparece la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$. Utiliza la sustitución $x = \sin u$, luego $dx = \cos u du$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\sin^2 u \cdot \cos u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} du = \int \frac{\sin^2 u \cdot \cos u}{\sqrt{\cos^2 u}} du = \int \sin^2 u du$$

Para calcular la última integral obtenida utiliza la identidad trigonométrica $\cos 2u = 1 - 2 \sin^2 u$ de donde

$$\sin^2 u = (1 - \cos 2u)/2.$$

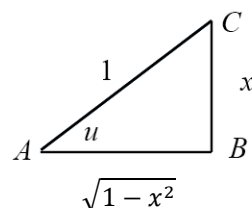
$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \sin^2 u du = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2u) du = \frac{1}{2} \int du - \frac{1}{2} \int \cos 2u du \\ &= \frac{1}{2} u - \frac{1}{4} \sin 2u + C \end{aligned}$$

Ahora utiliza la identidad $\sin 2u = 2 \sin u \cos u$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} u - \frac{1}{4} \sin 2u + C = \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} \sin u \cos u + C$$

Y como el resultado no está en términos de la variable x , acude a las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo, considerando el ángulo u tal que $0 \leq u \leq \pi/2$.

Como $x = \sen u$, entonces $u = \arcsen x$. En la figura de la derecha ABC es un triángulo rectángulo en B . Si $x = \sen u$, se tiene, por el teorema de Pitágoras $AB = \sqrt{1-x^2}$



Entonces $\cos u = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$ y, por tanto

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} (\arcsen x) - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$$

Comprueba:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} (\arcsen x) - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C \right)' &= \frac{1}{2} (\arcsen x)' - \left(\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \right)' \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} - \frac{-2x^2}{4\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Ejemplo formativo 6.5

1. Calcula $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$.

Resolución

Nota que en este caso aparece la forma $\sqrt{x^2-a^2}$. En casos de este tipo se utiliza generalmente la sustitución $x = \sec u$, de donde

$$dx = (\sec u)' du = \sec u \cdot \tan u du.$$

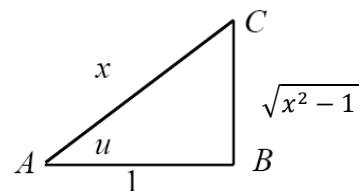
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx &= \int \frac{\sec u \cdot \tan u}{\sqrt{\sec^2 u - 1}} du = \int \frac{\sec u \cdot \tan u}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 u} - 1}} du = \int \frac{\sec u \cdot \tan u}{\tan u} du \\ &= \int \sec u du \end{aligned}$$

Ahora vuelve a utilizar

$$\int \sec u du = \ln|\tan u + \sec u| + C$$

En el triángulo ABC , rectángulo en B , como $x = \sec u$,

Entonces $AB = 1$ y $AC = x$. Por el teorema de Pitágoras.



$$BC = \sqrt{x^2 - 1}, \text{ luego } \tan u = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{1} \text{ y } \sec u = \frac{x}{1}$$

Por tanto, sustituyendo

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx &= \int \sec u \, du \\ &= \ln |\tan u + \sec u| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{1} + \frac{x}{1} \right| + C = \ln |\sqrt{x^2 - 1} + x| + C \end{aligned}$$

Comprueba:

$$\begin{aligned} \left(\ln |\sqrt{x^2 - 1} + x| + C \right)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \cdot \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

A veces, cuando el integrando contiene funciones cuadráticas, es necesario realizar transformaciones para obtener una expresión que, al aplicar el método de sustitución, se convierta en una función trigonométrica.

Ejemplo formativo 6.6

1. Calcula $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$.

Resolución

Al analizar el integrando, observa que el trinomio en el denominador no tiene raíces reales, ya que el discriminante $D = b^2 - 4ac < 0$. Sin embargo podemos transformar la expresión para que aparezca un binomio cuadrado perfecto en x . Para ello sumamos y restamos cuatro en el denominador del integrando, obteniendo la siguiente expresión:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4 - 4 + 5} = \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4) + 1} = \int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 1}$$

Ahora haz $u = x - 2$, entonces $du = dx$. Sustituye y obtienes

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan u + C = \arctan(x - 2) + C$$

Comprueba:

$$(\arctan(x - 2) + C)' = \frac{1}{1 + (x - 2)^2} = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$$

Como has apreciado, en los ejemplos formativos anteriores, el método de sustitución trigonométrica permite eliminar de forma efectiva el término de la raíz cuadrada en los casos en que en el integrando aparecen expresiones del tipo $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ o $\sqrt{x^2 - a^2}$.

Para cualquier valor $a \neq 0$, en el caso $\sqrt{a^2 - x^2}$ se utiliza la sustitución $x = a \operatorname{sen} u$ y se obtiene $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen} u)^2} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u} = a \cos u$.

Un procedimiento similar se utiliza en los restantes casos con una sustitución trigonométrica adecuada, como se muestra en la tabla siguiente:

Expresión	Sustitución trigonométrica	Resultado
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} u$	$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos x$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec u$	$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan x$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan u$	$\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec x$

Evaluación formativa 6.1

1. Calcula $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Resolución

Primero, verifica si es una integral inmediata o si se puede aplicar directamente alguno de los métodos o propiedades de integración. ¿Qué observas?

Al observar el numerador en el integrando, es posible aplicar una de las propiedades de la integración.

Así,

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$$

La primera de estas integrales ¿puedes calcularla de inmediato?

¿O hacer la sustitución $u = \underline{\hspace{2cm}}$? Entonces,

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

En la segunda integral obtenida $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ nota que el integrando se corresponde con la derivada de una función trigonométrica inversa, luego

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

Por tanto, sumando los dos resultados parciales, para la integral que queremos calcular se tiene

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

Comprueba.

2. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \frac{2x-3}{x^2-2x+5} dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} dx$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx$

d) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}} dx$

e) $\int \frac{x^2-16}{x} dx$

f) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}} dx$

g) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$

h) $\int \sqrt{4-x^2} dx$

i) $\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}} dx$

j) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx$

k) $\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$

l) $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$

PA 7. Integración por fracciones parciales

Progresión de aprendizaje 7

Argumenta la efectividad del método de integración por fracciones parciales, analizando los diferentes casos y justificando el proceso de descomposición de fracciones en integrales.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

En la progresión anterior, calculaste integrales indefinidas en las que el integrando era una función racional. Estas integrales pudieron resolverse completando expresiones para aplicar el método de la sustitución trigonométrica.

Cuando se trata de calcular primitivas en las que el integrando es una fracción constituida por polinomios y el denominador se puede factorizar, la integral indefinida se puede calcular expresando el integrando como una suma de fracciones simples, conocidas como **fracciones parciales**, que ya sabemos cómo integrar.

Para entender mejor este método, partiremos de un ejemplo en el que tomamos la diferencia de dos fracciones y las sumamos algebraicamente

$$\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1} = \frac{3(x+1) - 2(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+7}{x^2-x-2}$$

Ahora supongamos que lo que se busca es la integral indefinida de

$$f(x) = \frac{x+7}{x^2-x-2}.$$

Los métodos estudiados hasta el momento no nos permiten obtener un resultado. Sin embargo, si conocemos la descomposición de esta función en dos

fracciones, aplicando propiedades de la integración y utilizando resultados de integrales inmediatas, es posible calcularla.

$$\begin{aligned}\int \frac{x+7}{x^2-x-2} dx &= \int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1} \right) dx \\ &= \int \frac{3}{x-2} dx - \int \frac{2}{x+1} dx = 3 \ln|x-2| - 2 \ln|x+1| + C\end{aligned}$$

Es decir, para calcular integrales de este tipo es necesario transformar el integrando en fracciones simples. A este método lo llamaremos **descomposición en fracciones parciales**.

Para realizar estas transformaciones y calcular la integral dada, es necesario estar preparado en técnicas de factorización, resolución de sistemas de ecuaciones de 2 o 3 incógnitas y propiedades de los logaritmos, todo lo cual has estudiado en Unidades de Aprendizaje Curricular anteriores. Además, es fundamental dominar las principales integrales inmediatas que ya has visto en esta unidad.

Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, es una **función racional** propia, es decir, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y el grado de $P(x)$ es menor que el de $Q(x)$, es decir $gr P(x) < gr Q(x)$, entonces podemos descomponer $f(x)$ en la suma algebraica de fracciones parciales del tipo $\frac{P_r(x)}{Q_r(x)}$, donde el grado del polinomio del numerador $P_r(x)$ es menor que el grado del polinomio resultante en el denominador $Q_r(x)$.

Si la función racional $f(x)$ es impropia, es decir si $gr P(x) \geq gr Q(x)$, primero se requerirá efectuar la división de los dos polinomios. Posteriormente, se hará la descomposición en fracciones parciales de la fracción propia resultante para proceder a la integración.

Se diferencian en este procedimiento cuatro casos posibles.

Caso 1. El denominador es el producto de factores de la forma $(ax + b)$ todos distintos

Ejemplo formativo 7.1

1. Calcula $\int \frac{x+12}{x^2-x-6} dx$.

Resolución

En esta integral no parece posible utilizar los métodos conocidos hasta ahora. Dado que el trinomio tiene una descomposición factorial ($b^2 - 4ac = 25 > 0$), primero nos ocuparemos de descomponer el integrando en fracciones parciales.

Como $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ entonces $\frac{x+12}{x^2-x-6} = \frac{x+12}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$

Nota que en el numerador de cada fracción simple se coloca un polinomio de un grado menor que el del denominador, en este caso una constante, las cuales vamos a determinar a continuación.

$$\frac{x+12}{x^2-x-6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{(A+B)x + (2A-3B)}{(x-3)(x+2)}$$

Al comparar la primera y última fracciones, por ser los denominadores iguales, entonces también lo son los numeradores. Por tanto $(A+B)$ tiene que ser igual al coeficiente de la variable x y $(2A-3B)$ al término independiente 12, es decir

$$A+B \qquad 3A+3B=3 \qquad 3A+3B=3 \qquad A=3$$

$$2A-3B \xrightarrow{\quad} 2A-3B=12 \xrightarrow{\quad} \frac{2A-3B=12}{5A=15} \xrightarrow{\quad} 3+B=1 \qquad B=-2$$

Así, resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x+12}{x^2-x-6} dx &= \int \left(\frac{3}{x-3} - \frac{2}{x+2} \right) dx = 3 \int \frac{1}{x-3} dx - 2 \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= 3 \ln|x-3| - 2 \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

Comprueba:

$$(3 \ln|x-3| - 2 \ln|x+2| + C)' = \frac{3}{x-3} - \frac{2}{x+2} = \frac{x+12}{x^2-x-6}.$$

Ejemplo formativo 7.2

1. Calcula $\int \frac{12x-8}{x^3-4x} dx$.

Resolución

Como $x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{12x-8}{x^3-4x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x+2)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+2)}{x(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (-2B+2C)x - 4A}{x(x+2)(x-2)} \end{aligned}$$

Si igualas los coeficientes de iguales potencias en el numerador de la primera y última fracción obtienes un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$\begin{array}{ccccccc} A + B + C = 0 & & A = 2 & & A = 2 & & A = 2 \\ -2B + 2C = 12 & \rightarrow & B + C = -2 & \rightarrow & 2B + 2C = -4 & \rightarrow & C = 2 \\ -4A & = & -8 & & -2B + C = 12 & & -2B + C = 12 & B + 2 = -2 \end{array}$$

$$4C = 8 \qquad B = -4$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{12x - 8}{x^3 - 4x} dx &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{4}{x+2} + \frac{2}{x-2} \right) dx = \int \frac{2}{x} dx - \int \frac{4}{x+2} dx + \int \frac{2}{x-2} dx \\ &= 2 \ln|x| - 4 \ln|x+2| + 2 \ln|x-2| + C \end{aligned}$$

Puedes utilizar también otro método para calcular los valores de A, B y C , pues en la igualdad obtenida de los numeradores

$12x - 8 = A(x+2)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+2)$, como es válida para todo x , si identificas los valores que anulan los diferentes factores puedes calcular estas constantes. En efecto,

- si $x = 0$, $12 \cdot 0 - 8 = A(0+2)(0-2) + B \cdot 0 \cdot (0-2) + C \cdot 0 \cdot (0+2)$, luego $A = -8/-4 = 2$
- si $x = -2$, entonces $12 \cdot (-2) - 8 = A \cdot 0 + B(-2)(-2-2) + C \cdot 0$, luego $-32 = 8B$ y $B = -4$
- si $x = 2$, entonces $12 \cdot 2 - 8 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 2(2+2)$, de donde $16 = 8C$ y $C = 2$

Y obtienes los mismos resultados que anteriormente para A, B y C .

Si compruebas

$$\begin{aligned} (2 \ln|x| - 4 \ln|x+2| + 2 \ln|x-2| + C)' &= \frac{2}{x} - \frac{4}{x+2} + \frac{2}{x-2} \\ &= \frac{2x^2 - 8 - 4x^2 + 8x + 2x^2 + 4x}{x(x+2)(x-2)} = \frac{12x - 8}{x(x^2 - 4)} \end{aligned}$$

Caso 2. En el denominador hay factores de la forma $(ax + b)$ repetidos

En este caso, si un factor lineal $(ax + b)$ se repite n veces, es decir si $(ax + b)^n$ figura en el denominador de la función racional una vez factorizado, en lugar de poner una sola vez el término simple $\frac{A_1}{ax+b}$, corresponde una suma de n fracciones

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Es decir, tantas fracciones parciales como veces se repita cada factor lineal. Nota que en el numerador se continúa escribiendo un polinomio de un grado menor que el factor lineal, en este caso una constante a determinar, independientemente que esté elevado a un exponente mayor que uno.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo formativo 7.3

1. Calcula $\int \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$.

Resolución

Considera el polinomio que está en el denominador $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

Por la expresión del polinomio es fácil apreciar que 1 y -1 son raíces, es decir que $Q(1) = 0$ y $Q(-1) = 0$, o también agrupando los dos primeros términos, los dos restantes y factorizando, se obtiene $Q(x) = (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)^2 (x + 1)$. Por tanto, en este caso tenemos un factor lineal repetido dos veces y uno no repetido, luego la función racional se descompone en fracciones parciales de la siguiente manera:

$$\frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x - 1} = \frac{A(x^2 - 1) + B(x + 1) + C(x - 1)^2}{(x - 1)^2 (x + 1)}$$

Igualando los denominadores se obtiene

$$4x = A(x^2 - 1) + B(x + 1) + C(x - 1)^2 = (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C)$$

Ahora para obtener los valores de A , B y C podemos igualar los coeficientes de las potencias de x de igual grado y obtener un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas o sustituir en la primera igualdad de la expresión anterior valores de x que anulen varios sumandos. Veamos esta última forma.

- Si $x = 1$, $4 \cdot 1 = A(0) + B(2) + C(0)$, de donde $B = 2$
- Si $x = -1$, $4(-1) = A(0) + B(0) + C(-2)^2$, luego $C = -1$
- Si $x = 0$, $4 \cdot 0 = A(-1) + 2(1) + (-1)(-1)^2$, luego $0 = -A + 2 - 1$ y $A = 1$

Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx &= \int \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2} - \frac{1}{x + 1} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{2}{(x - 1)^2} dx - \int \frac{1}{x + 1} dx \\ &= \ln|x - 1| - 2(x - 1)^{-1} - \ln|x + 1| + C = -\frac{2}{x - 1} + \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C \end{aligned}$$

La última expresión se obtiene aplicando la propiedad $\ln M - \ln N = \ln \frac{M}{N}$.

Comprueba:

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{2}{x-1} + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C\right)' &= 2(x-1)^{-2} + \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2(x^2-1) + 2(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2-1)} \\
&= \frac{4x^2 - 4x}{(x-1)^2(x^2-1)} = \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}
\end{aligned}$$

Ejemplo formativo 7.4

1. Calcula $\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$.

Resolución

Observa que el grado del numerador es mayor que el del denominador, lo que convierte al integrando en una fracción impropia. El primer paso es transformar el integrando en una fracción propia. Esto se puede lograr dividiendo directamente los dos polinomios o siguiendo estos pasos adicionales:

$$\frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} = \frac{x^3(x-1) - x - 1}{x^2(x-1)} = \frac{x^3(x-1)}{x^2(x-1)} - \frac{x+1}{x^2(x-1)} = x - \frac{x+1}{x^2(x-1)}$$

De esta forma hemos transformado el integrando en la suma de un monomio y una fracción propia, luego

$$\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx = \int \left(x - \frac{x+1}{x^2(x-1)} \right) dx = \int x dx - \int \frac{x+1}{x^2(x-1)} dx$$

La primera integral es inmediata. Para resolver la segunda aplicamos la descomposición en fracciones parciales y obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres variables igualando numeradores.

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x^2(x-1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} \\
&= \frac{(A+C)x^2 + (-A+B)x - B}{x^2(x-1)}
\end{aligned}$$

$$A + C = 0$$

$$B = -1$$

$$B = -1$$

$$-A + B = 1 \quad \rightarrow \quad -A - 1 = 1 \text{ y } A = -2 \quad \rightarrow$$

$$A = -2$$

$$-B = 1, \text{ luego } B = -1$$

$$A + C = 0$$

$$-2 + C = 0, \text{ luego } C = 2$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx &= \int x dx - \int \frac{x+1}{x^2(x-1)} dx = \int x dx \\
&\quad - \left[-\int \frac{2}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{2}{x-1} dx \right] \\
&= \frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| - \frac{1}{x} - 2 \ln|x-1| + C = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + 2 \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + C
\end{aligned}$$

Comprueba:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + 2 \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + C \right)' &= x + \frac{1}{x^2} + 2 \frac{x-1}{x} \cdot \frac{(x-1) - x}{(x-1)^2} = x + \frac{1}{x^2} + 2 \frac{-1}{x(x-1)} \\
&= \frac{x^3(x-1) + (x-1) - 2x}{x^2(x-1)} = \frac{x^4 - x^3 + (x-1) - 2x}{x^2(x-1)} = \frac{x^4 - x^3 - 1}{x^2(x-1)}
\end{aligned}$$

Caso 3. En el denominador hay factores cuadráticos irreducibles de la forma $(ax^2 + bx + c)$ que no se repiten

En esta situación, cada fracción parcial de la descomposición de $Q(x)$ de la función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$, en la que el denominador tiene la forma irreducible $(ax^2 + bx + c)$, lo que significa que $b^2 - 4ac < 0$, se escribe como un sumando del tipo $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$. Es decir, el numerador es un polinomio de un grado menor que el del denominador, en este caso una expresión lineal en la que A y B son constantes a determinar.

Ejemplo formativo 7.5

1. Calcula $\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} dx$.

Resolución

Como, junto con el factor lineal $(x-1)$, el factor (x^2+1) es cuadrático e irreducible, busca la descomposición en fracciones parciales de la forma:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + Bx(x-1) + C(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

Igualando los numeradores $x+1 = A(x^2+1) + Bx(x-1) + C(x-1)$ y como esta expresión es válida para todo x :

- Si $x = 1$, entonces $1+1 = A(1+1)$, de donde $A = 1$
- Si $x = 0$, entonces $1 = A + C(-1)$, de donde $1 = 1 - C$, luego $C = 0$
- Si $x = -1$, entonces $0 = (1)(0) + B(2)$, de donde $B = -1$

Así, podemos integrar y aplicando propiedades de los logaritmos, se tiene:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} dx &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx \\
&= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x}{x^2+1} dx = \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx \\
&= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C = \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} + C
\end{aligned}$$

Comprueba:

$$\begin{aligned}
\left(\ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} + C \right)' &= \frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-1)} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} - (x-1) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \right)}{x^2+1} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-1)} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} - \left(\frac{x(x-1)}{\sqrt{x^2+1}} \right)}{x^2+1} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-1)} \cdot \frac{(x+1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{(x+1)}{(x-1)(x^2+1)}
\end{aligned}$$

Caso 4. En el denominador hay factores cuadráticos irreducibles de la forma $(ax^2 + bx + c)$ que se repiten

Si $Q(x)$ tiene algún factor irreducible $(ax^2 + bx + c)^n$, entonces en lugar de una única fracción parcial se considerará la suma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Es decir, en el numerador se escribe una expresión lineal que es de un grado menor que el grado de la expresión cuadrática que aparece como base de cada potencia en el denominador de cada fracción parcial y se deben determinar las constantes A_r , y B_r , con $1 \leq r \leq n$.

Ejemplo formativo 7.6

1. Calcula $\int \frac{2x^2 - x + 2}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$.

Resolución

El denominador del integrando es un trinomio cuadrado perfecto, luego factorizamos $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$ y tenemos un factor cuadrático irreducible repetido.

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 - x + 2}{x^4 + 2x^2 + 1} &= \frac{2x^2 - x + 2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(Ax + B)(x^2 + 1) + (Cx + D)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D)}{(x^2 + 1)^2}\end{aligned}$$

Ahora comparando numeradores

$A = 0, B = 2, A + C = -1$, de donde $C = -1$ y $B + D = 2$, luego $D = 0$.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 - x + 2}{x^4 + 2x^2 + 1} dx &= \int \frac{2}{(x^2 + 1)} dx - \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= 2 \int \frac{dx}{(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx = 2 \arctan x - \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)^{-2+1}}{-1} + C \\ &= 2 \arctan x + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C\end{aligned}$$

Comprueba:

$$\begin{aligned}\left(2 \arctan x + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C\right)' &= (2 \arctan x)' + \left(\frac{1}{2(x^2 + 1)}\right)' \\ &= 2 \frac{1}{1 + x^2} - \frac{2x}{2} (x^2 + 1)^{-2} = \frac{2}{x^2 + 1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2(x^2 + 1) - x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 - x + 2}{(x^2 + 1)^2}\end{aligned}$$

Hasta ahora, has aprendido diversos métodos para integrar funciones, desde la integración inmediata hasta la descomposición en fracciones parciales. El objetivo general es transformar el cálculo de una integral en el de otras ya conocidas, más fáciles o menos complejas de calcular.

El cálculo de la primitiva de una función puede realizarse de varias maneras. Se trata de identificar cómo transformar el integrando, cuando sea necesario, para aplicar alguno de los métodos estudiados. Es importante recordar que hay funciones que no tienen una integral elemental, pero esas no se abordarán en esta Unidad de Aprendizaje Curricular.

A continuación, se presentarán ejercicios en los que deberás identificar una estrategia para calcular cada integral. No existe una regla o estrategia única; solo mediante la práctica constante se adquieren habilidades en el cálculo de integrales.

Evaluación formativa 7.1

1. Calcula $\int \frac{x + 1}{x^3 + x^2 - 6x} dx$.

Resolución

Si factorizas el polinomio del denominador: $x^3 + x^2 - 6x =$ _____

Entonces puedes escribir el integrando como la suma de fracciones parciales:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{\quad}{x} + \frac{\quad}{x-2} + \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

Así, se obtiene un sistema de ecuaciones a resolver:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ A + 3B - 2C &= 1 \\ -6A &= 1 \end{aligned}$$

De donde se obtiene: $A =$ _____, $B =$ _____, $C =$ _____. Por tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx &= \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} \\ &= \frac{\quad}{\quad}. \end{aligned}$$

El orden inicial de los sumandos, en la descomposición en fracciones simples del integrando, puede ser diferente al seleccionado y se obtiene un sistema de ecuaciones para cada caso, pero el resultado final es el mismo. Comprueba tu resultado.

2. Calcula $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$.

Resolución

Analiza si se puede aplicar alguna de las vías utilizadas hasta el momento para calcularla.

El denominador se puede escribir: $x^4 + 3x^2 + 2 = x^4 + 2x^2 + x^2 + 2$. Así, se puede factorizar agrupando los dos primeros sumandos y los dos restantes:

$$x^4 + 2x^2 + x^2 + 2 = x^2(x^2 + 2) + (x^2 + 2) = (x^2 + 2)(x^2 + 1)$$

Entonces, la descomposición en fracciones simples del integrando es:

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} = \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad}$$

Sumando las fracciones parciales y agrupando resulta:

Igualando los numeradores, se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Calcula los valores de las incógnitas.

Por tanto $A = \underline{\hspace{2cm}}$, $B = \underline{\hspace{2cm}}$, $C = \underline{\hspace{2cm}}$, $D = \underline{\hspace{2cm}}$.

Así, se obtiene

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \int \frac{x}{x^2 + 2} dx = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + C$$

Comprueba el resultado que obtuviste:

3. Calcula $\int \frac{-x^4 + x^2 + 4}{x^5 + 4x^3 + 4x} dx$.

Resolución

Al ser el denominador $x^5 + 4x^3 + 4x = x(x^2 + 2)^2$, en esta descomposición factorial se presenta un factor cuadrático irreducible repetido. Por tanto

$$\frac{-x^4 + x^2 + 4}{x^5 + 4x^3 + 4x} = \frac{-x^4 + x^2 + 4}{x(x^2 + 2)^2} = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}.$$

Agrupar las tres fracciones parciales en una sola que te permita obtener los coeficientes de las expresiones que colocaste en sus numeradores:

Ahora iguala el numerador de la primera fracción con el de la última fracción obtenida, para lograr un sistema de ecuaciones que te permita obtener los valores de A, B, C, D y E .

Entonces

$$\int \frac{-x^4 + x^2 + 4}{x^5 + 4x^3 + 4x} dx = \int \quad + \int \quad + \int \quad =$$

¿Coincide tu resultado con $\int \frac{-x^4 + x^2 + 4}{x^5 + 4x^3 + 4x} dx = \ln|x| - \ln|x^2 + 2| - \frac{1}{2(x^2 + 2)} + C$?

Comprueba.

4. Calcula por descomposición en fracciones parciales las siguientes integrales. Identifica previamente a cuál de los cuatro casos se refiere cada ejercicio. Comprueba siempre tu resultado.

a) $\int \frac{dx}{x^2 - x - 20}$	b) $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$	c) $\int \frac{3}{x^2 + x - 2} dx$
d) $\int \frac{8}{x^2 - 16} dx$	e) $\int \frac{5x}{x^2 - 3x - 4} dx$	f) $\int \frac{5x}{2x^2 + 3x - 2} dx$
g) $\int \frac{5}{(x+2)(x^2 + 3x + 2)} dx$	h) $\int \frac{2}{x^4 - 1} dx$	i) $\int \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} dx$
j) $\int \frac{x - 1}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx$	k) $\int \frac{dx}{x^3 + x}$	l) $\int \frac{x + 2}{x^3 + x} dx$
m) $\int \frac{4x - 5}{x^3 - 3x^2} dx$	n) $\int \frac{3x^3 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$	ñ) $\int \frac{x + 4}{x^3 + 3x^2 + 2x} dx$
o) $\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 1)^2} dx$	p) $\int \frac{4x^3}{(x^2 + 2)^2} dx$	q) $\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$

5. Calcula cada una de las siguientes integrales. Comprueba siempre tu resultado.

a) $\int \frac{dx}{(2x + 3)^3}$	b) $\int \frac{3x}{3x^2 + 1} dx$	c) $\int x e^{3x} dx$
d) $\int x^3 e^{2x} dx$	e) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$	f) $\int \frac{4x^2 + 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx$
g) $\int \frac{2x + 5}{x^2 + 5x - 1} dx$	h) $\int \frac{e^{x+1}}{e^{2x} + e^x - 2} dx$	i) $\int \sec^3 x dx$
j) $\int e^{\tan x} \sec^2 x dx$	k) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}} dx$	l) $\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} dx$
m) $\int \frac{2x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 - 4x + 3} dx$	n) $\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx$	o) $\int \frac{x - 8}{x(x-2)^2} dx$

PA 8. El área y la integral definida

Progresión de aprendizaje 8

Interpreta el concepto de integral definida, analizando sus propiedades y aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver problemas de áreas y acumulación, justificando cada paso del proceso.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	A			
	C			
	H			
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	A			
	C			
	H			

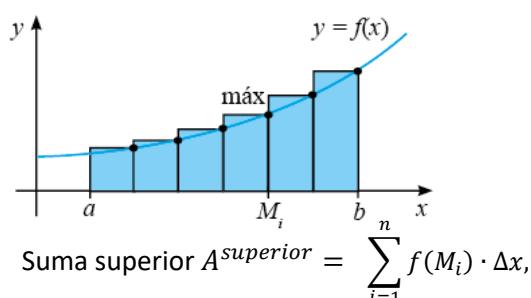
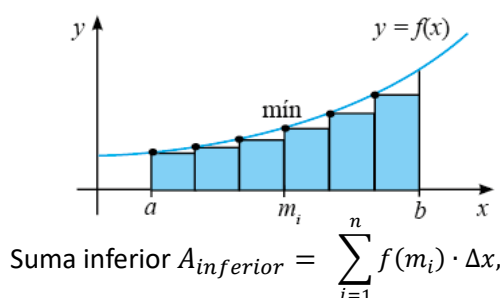
El área y la integral definida

Como **antecedente** en la progresión anterior estudiamos el cálculo del área bajo una curva calculando el límite de sumas de áreas de rectángulos. En esta progresión, dicha área la vamos a definir en términos de la integral que recibe el nombre de **integral definida**.

Recuerda que en cálculo diferencial estudiamos el problema de la recta tangente y el problema de la velocidad instantánea que nos llevaron a la derivada. En esta progresión relacionaremos el problema del área con la integral definida.

La integral definida

Para calcular el área entre el eje x , y la gráfica de $f(x)$ sobre $[a, b]$, dos de los métodos que usamos, son: la suma inferior y la suma superior.



Si al aproximar a infinito el número de **rectángulos de igual base**, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(m_i) \Delta x = A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x,$$

decimos que la **función f es integrable** sobre el intervalo $[a, b]$, y la denotamos como

$$\int_a^b f(x) dx,$$

y se lee **integral definida de $f(x)$ desde a hasta b** .

Las funciones que vamos a integrar son continuas en el intervalo $[a, b]$, y por ser continuas, también son integrables en $[a, b]$.

Definición de integral definida.

Sea f una función continua sobre $[a, b]$. La integral definida de f desde a hasta b , denotada por $\int_a^b f(x) dx$, es el número

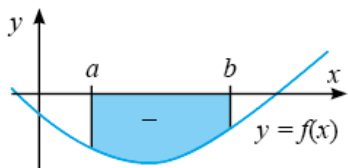
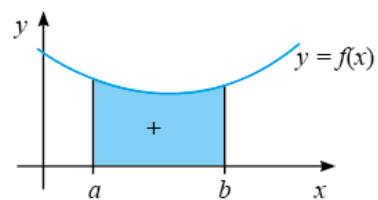
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x$$

donde a es el **límite de integración inferior** y b el **límite de integración superior**.

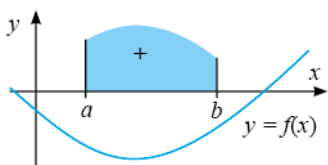
En la expresión $\int_a^b f(x) dx$, la única restricción para $f(x)$ es que sea continua en $[a, b]$, por lo que la **función puede ser positiva** ($f(x) \geq 0$) o **negativa** ($f(x) \leq 0$) en dicho intervalo.

En la figura de la derecha, $f(x) \geq 0$ sobre $[a, b]$, por lo que la integral definida es un número no negativo y

$$A = \int_a^b f(x) dx$$



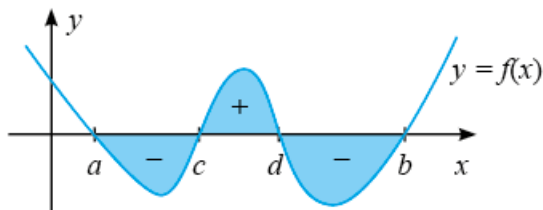
En la figura de la izquierda, $f(x) \leq 0$ sobre $[a, b]$, por lo que la integral definida es un número negativo y la $\int_a^b f(x) dx$ no calcula el área geométrica.



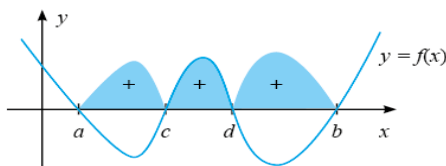
En este caso, para calcular el área geométrica, usamos

$$A = \int_a^b |f(x)| dx \text{ o } A = - \int_a^b f(x) dx$$

En conclusión, $\int_a^b f(x) dx$ calcula el **área con signo**.



Si queremos calcular el **área total** (área geométrica entre el eje x , la gráfica de $f(x)$ desde a hasta b), en los intervalos $[a, c]$ y $[d, b]$ debemos usar $\int_a^c |f(x)| dx$ y $\int_d^b |f(x)| dx$ respectivamente, debido a que ahí $f(x) \leq 0$.



$$A = - \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx - \int_d^b f(x) dx$$

Propiedades de la integral definida

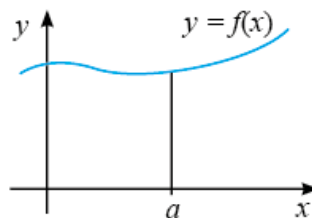
A continuación, veremos cinco propiedades de la integral definida y las demostraremos usando la definición.

Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$, k un número real y $c \in [a, b]$.

1. Si el ancho del intervalo es igual a cero, la integral definida es igual a cero:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \left(\frac{a-a}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) (0) = 0 \end{aligned}$$



2. Si se intercambian los límites de integración, se obtiene el número opuesto

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \left(\frac{b-a}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \left(-\frac{a-b}{n} \right)$$

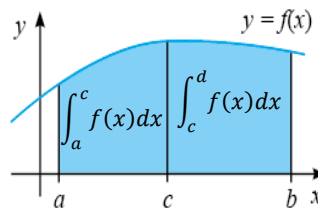
$$= - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \left(\frac{a-b}{n} \right) = - \int_b^a f(x) dx$$

3. Un factor constante ($k \in \mathcal{R}$) se puede extraer de la integral definida:

$$\begin{aligned} \int_a^b kf(x) dx &= k \int_a^b f(x) dx \\ \int_a^b kf(x) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n kf(x_i^*) \left(\frac{b-a}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} k \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \left(\frac{b-a}{n} \right) \\ &= k \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \left(\frac{b-a}{n} \right) \\ &= k \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

4. Propiedad aditiva: si $c \in [a, b]$, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \left(\frac{b-a}{n} \right)$$



$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \left(\frac{b-c+c-a}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \left(\frac{c-a}{n} + \frac{b-c}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \left(\frac{c-a}{n} \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \left(\frac{b-c}{n} \right) \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

5. La integral definida de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales definidas:

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \\
\int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) + g(x_i^*)] \left(\frac{b-a}{n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left[f(x_i^*) \left(\frac{b-a}{n} \right) + g(x_i^*) \left(\frac{b-a}{n} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \left(\frac{b-a}{n} \right) + \sum_{i=1}^n g(x_i^*) \left(\frac{b-a}{n} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \left(\frac{b-a}{n} \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n g(x_i^*) \left(\frac{b-a}{n} \right) \\
&= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.
\end{aligned}$$

Teorema fundamental del cálculo

Calcular la integral definida como el límite de sumas es laborioso, como lo experimentamos en la sección anterior al calcular la distancia recorrida por un móvil, así como al demostrar las propiedades de la integral definida. Hay una forma más fácil de calcularla, y es usando la primitiva o antiderivada de una función continua en un intervalo cerrado.

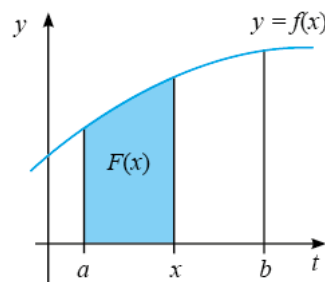
Para calcular $\int_a^b f(x) dx$, necesitamos dos resultados importantes, el primero es para determinar una primitiva de la función continua f en un intervalo, y el segundo, nos indica como usar esta primitiva para calcular la integral definida. Empecemos por definir la función integral $F(x)$.

Función integral

Consideremos en la integral definida $\int_a^b f(t) dt$ el límite superior variable, es decir, en función del límite $x \in [a, b]$.

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

A $F(x)$ la llamaremos función integral (si $f(x) \geq 0$ le podemos llamar función de área) y su valor depende del límite superior de x .



Si $x = a, F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$. Si $x = b, F(b) = \int_a^b f(t) dt$.

Primer teorema fundamental del cálculo

El primer teorema relaciona la integral con la derivada.

Primer teorema fundamental del cálculo (PTFC)

Sea una función continua sobre $[a, b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ para $x \in [a, b]$, entonces $F'(x) = f(x)$.

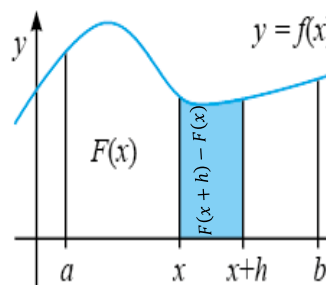
Demostración

Si F es derivable, debe existir el límite. Si el límite existe:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Por definición de F ,

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$



El intervalo $[x, x+h]$ tiene un ancho h , y cuando $h \rightarrow 0$ la altura comprendida entre $f(x)$ y $f(x+h)$ será más próxima a $f(x)$, es decir, el área $\int_x^{x+h} f(t) dt$ se aproxima a $h \cdot f(x)$, así que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} = f(x)$$

Por tanto $F'(x) = f(x)$.

El PTFC nos dice que toda función continua en un intervalo admite una antiderivada o primitiva. En términos del área bajo la curva, la derivada de la primitiva mediante la que determinamos el área es igual a la función que se integra (al integrando).

Segundo teorema fundamental del cálculo

El siguiente teorema nos dice como evaluar una integral definida usando **una primitiva cualquiera de f** .

Segundo teorema fundamental del cálculo (STFC)

Sea f una función continua sobre $[a, b]$ y F una antiderivada de f sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Demostración

Por el PTFC una antiderivada de f es $G(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Si F es cualquier otra antiderivada de f , entonces $G(x) - F(x) = C$ o $G(x) = F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria. En consecuencia

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) + C$$

Luego, si $x = a$, $G(a) = \int_a^a f(t) dt = F(a) + C = 0$, de donde $C = -F(a)$. Por lo que

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

$$\text{Ahora, si } x = b, G(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

$$\text{Por lo tanto } \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

A continuación, veremos cómo es que se relaciona la integral definida con la integral indefinida mediante la antiderivada o primitiva:

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{Integral definida}} = \underbrace{\left[\int f(x) dx \right]_a^b}_{\text{Integral indefinida}} = \underbrace{F(x)|_a^b}_{\text{Una antiderivada}}$$

Cuando evaluemos la integral definida, se acostumbra a usar la siguiente notación

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

La notación $F(x)|_a^b$ significa que F debe evaluarse en b y luego en a , siempre que $b > a$.

Por ejemplo: si $F' = f$, entonces $\int_2^7 f(x)dx = F(x)|_2^7 = F(7) - F(2)$, en la que $7 > 2$.

En $F(x)|_a^b$ omitimos la constante de integración, porque esta constante se cancela en la respuesta final, como lo veremos a continuación.

Sea $F(x) + C$ cualquier primitiva de $f(x)$, luego, por la definición de integral definida

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x) + C]_a^b = F(b) + C - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

La constante C ha sido cancelada de la respuesta. Además, cuando hay más de un sumando en $F(x) + C$, se sugiere usar $[\]_a^b$ en vez de $|_a^b$,

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \text{ o } \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Para calcular la integral definida usaremos el STFC, que también se le llama regla de Barrow, pues muestra el procedimiento a seguir.

Regla de Barrow para calcular $\int_a^b f(x) dx$.

1. Encuentra una antiderivada o primitiva F de f .
2. Evalúa $F(b)$ y $F(a)$.
3. Calcula el número $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Ejemplo formativo 8.1

1. Calcula la integral definida de las siguientes funciones en el intervalo indicado y determina si el resultado representa o no el área geométrica.

a) $f(x) = 2$ en $[2, 5]$

b) $f(x) = x$ en $[0, 3]$

c) $f(x) = x^2$ en $[-2, 3]$

d) $f(x) = x^3$ en $[-3, 1]$

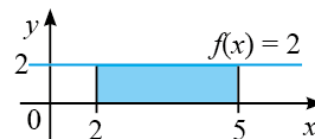
Resolución

a) $f(x) = 2$ en $[2, 5]$

$F(x) = 2x$ es una primitiva de $f(x)$, pues $F'(x) = 2$

$F(5) = 2(5) = 10$ y $F(2) = 2(2) = 4$

$$\int_2^5 2dx = 2x|_2^5 = 10 - 4 = 6$$



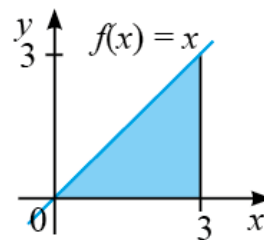
En la gráfica, $f(x) = 2 > 0$ en $[2, 5]$. En este caso, la integral definida calcula el área geométrica y es $6 u^2$.

b) $f(x) = x$ en $[0, 3]$

$F(x) = \frac{x^2}{2}$ es una primitiva de $f(x)$, ya que $F'(x) = x$

$$F(3) = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2} \text{ y } F(0) = \frac{0^2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\int_0^3 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{9}{2} - 0 = \frac{9}{2}$$



Dado que $f(x) = x \geq 0$ en $[0, 3]$, la integral definida calcula el área geométrica y es $4.5 u^2$.

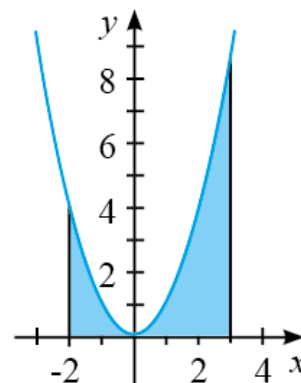
c) $f(x) = x^2$ en $[-2, 3]$

$F(x) = \frac{x^3}{3}$ es una primitiva de $f(x)$, ya que $F'(x) = x^2$

$$F(3) = \frac{3^3}{3} = \frac{27}{3} \text{ y } F(-2) = \frac{(-2)^3}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$\int_{-2}^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^3 = \frac{27}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{27}{3} + \frac{8}{3} = \frac{35}{3}$$

Ya que $f(x) = x \geq 0$ en $[-2, 3]$, la integral definida calcula el área geométrica y es $35/3 u^2$.



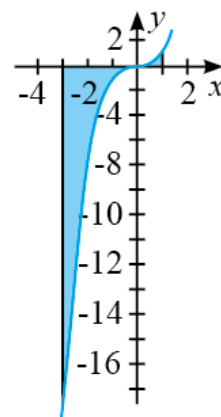
d) $f(x) = x^3$ en $[-3, 1]$

$F(x) = \frac{x^4}{4}$ es una primitiva de $f(x)$, ya que $F'(x) = x^3$

$$F(1) = \frac{1^4}{4} = \frac{1}{4} \text{ y } F(-3) = \frac{(-3)^4}{4} = \frac{81}{4}$$

$$\int_{-3}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-3}^1 = \frac{1}{4} - \frac{81}{4} = -\frac{80}{4} = -20$$

Debido a que $f(x) = x \leq 0$ en $[-3, 0]$, la integral definida no calcula el área geométrica.



Veamos más ejemplos de integrales definidas, pero ahora haremos los cálculos más directos.

Ejemplo formativo 8.2

1. Calcula las siguientes integrales definidas.

$$\text{a) } \int_{-2}^3 (3x^2 - 5x + 7) dx \quad \text{b) } \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx \quad \text{c) } \int_0^{2\pi} (3x + \cos x) dx \quad \text{d) } \int_0^2 e^{3x} dx$$

Resolución

$$\text{a) } \int_{-2}^3 (3x^2 - 5x + 7) dx = \left[x^3 - \frac{5x^2}{2} + 7x \right]_{-2}^3 = 3^3 - \frac{5(3)^2}{2} + 7(3) - \left[(-2)^3 - \frac{5(-2)^2}{2} + 7(-2) \right]$$

$$= 27 - \frac{45}{2} + 21 - [-8 - 10 - 14] = \frac{51}{2} - [-32] = \frac{115}{2}$$

$$\text{b) } \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx = \int_0^8 x^{1/3} dx = \frac{3x^{4/3}}{4} \Big|_0^8 = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} \Big|_0^8 = \frac{3\sqrt[3]{8^4}}{4} - \frac{3\sqrt[3]{0^4}}{4} = 12 - 0 = 12$$

$$\text{c) } \int_0^{2\pi} (3x + \cos x) dx = \left[\frac{3x^2}{2} + \sin x \right]_0^{2\pi} = \frac{3(2\pi)^2}{2} + \sin(2\pi) - \left[\frac{3(0)^2}{2} + \sin 0 \right] = 6\pi^2 - 0 = 6\pi^2$$

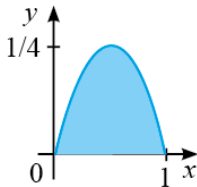
$$\text{d) } \int_0^2 e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} \Big|_0^2 = \frac{e^{3(2)}}{3} - \frac{e^{3(0)}}{3} = \frac{e^6}{3} - \frac{e^0}{3} = \frac{e^6}{3} - \frac{e^1}{3} = \frac{e^6 - 1}{3}$$

Ahora usaremos la integral definida para calcular el área bajo la curva.

Ejemplo formativo 8.3

1. Calcula el área de la región indicada.

$$\text{a) } y = x - x^2$$

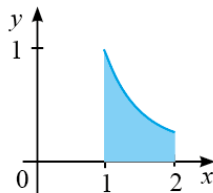


Resolución

$$A = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{6}$$

$$A = \frac{1}{6} u^2$$

$$\text{b) } y = \frac{1}{x^2}$$



Resolución

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1} \right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} u^2$$

Ejemplo formativo 8.4

1. Calcula el área delimitada por las ecuaciones $y = 5x^2 + 2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.
2. Determina el área bajo la curva $y = 2 + \sqrt{x}$ en el intervalo $2 \leq x \leq 6$.

Resolución

$$1. A = \int_0^2 (5x^2 + 2) dx = \left[\frac{5x^3}{3} + 2x \right]_0^2 = \frac{5(2^3)}{3} + 2(2) - \left[\frac{5(0^3)}{3} + 2(0) \right] = \frac{40}{3} + 4 - 0 = \frac{52}{3}$$

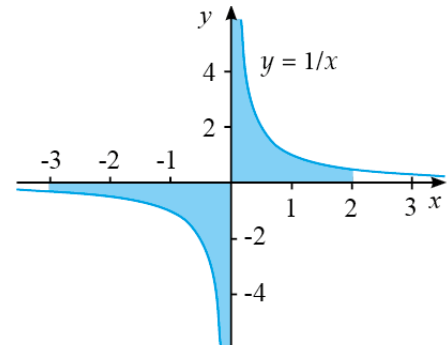
El área limitada por las ecuaciones $y = 5x^2 + 2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ es $\frac{52}{3} u^2$.

$$\begin{aligned} 2. \int_2^6 (2 + \sqrt{x}) dx &= \int_2^6 (2 + x^{1/2}) dx = \left[2x + \frac{2x^{3/2}}{3} \right]_2^6 = 2(6) + \frac{2\sqrt{6^3}}{3} - \left[2(2) + \frac{2\sqrt{2^3}}{3} \right] \\ &= 12 + 4\sqrt{6} - \left[4 + \frac{4\sqrt{2}}{3} \right] = 8 + 4\sqrt{6} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \approx 15.91 \end{aligned}$$

El área bajo la curva $y = 2 + \sqrt{x}$ en el intervalo $2 \leq x \leq 6$, es $15.91 u^2$.

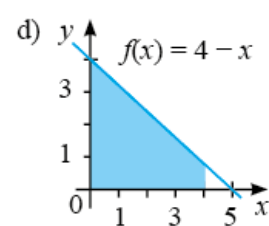
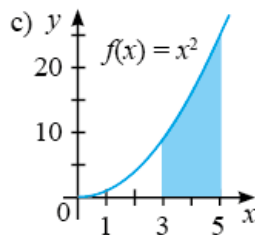
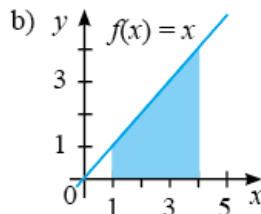
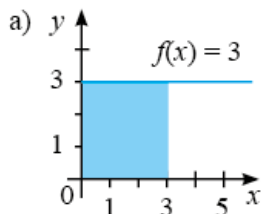
Al momento de integrar una función en un intervalo, debemos verificar que la integral definida existe; por ejemplo, $\int_{-3}^2 \frac{1}{x} dx$ no existe, pues tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

En la definición de integral definida, así como en el STFC se pide que $f(x) = \frac{1}{x}$ sea continua en $[-3, 2]$.



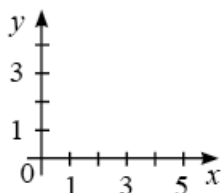
Evaluación formativa 8.1

1. Formula una integral definida que represente el área de la región sombreada (no evaluar la integral).

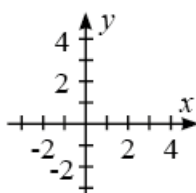


2. Dibuja la región cuya área está dada por la integral definida.

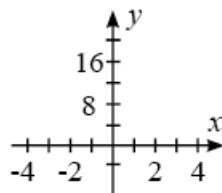
a) $\int_2^4 3 \, dx$



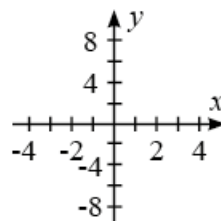
b) $\int_{-2}^3 x \, dx$



c) $\int_{-4}^4 x^2 \, dx$



d) $\int_{-2}^2 x^3 \, dx$



3. Usa los siguientes resultados: $\int_{-5}^4 f(x) \, dx = 8$ y $\int_4^6 f(x) \, dx = -3$ para calcular el área total entre el eje x , la gráfica de $f(x)$ y las rectas verticales $x = -5$ y $x = 6$.

4. Usa los siguientes resultados: $\int_{-5}^4 f(x) \, dx = 8$, $\int_4^6 f(x) \, dx = -3$ y $\int_4^6 g(x) \, dx = 9$ para calcular las siguientes integrales definidas.

a) $\int_1^4 f(x) \, dx$

b) $\int_{-5}^4 3f(x) \, dx$

c) $\int_{-5}^6 f(x) \, dx$

d) $\int_4^6 [f(x) + g(x)] \, dx$

e) $\int_6^4 g(x) \, dx$

5. Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_1^3 (x^2 + x) \, dx$

b) $\int_{-2}^4 2x(x - 2) \, dx$

c) $\int_0^1 \sqrt{x}(x^2 - x) \, dx$

d) $\int_2^5 \frac{2}{x} \, dx$

e) $\int_1^7 \frac{2x^2 - 5}{x} \, dx$

f) $\int_0^4 \sqrt{3x + 2} \, dx$

g) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$

h) $\int_0^{\pi/6} \tan^2(2x) \, dx$

i) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$

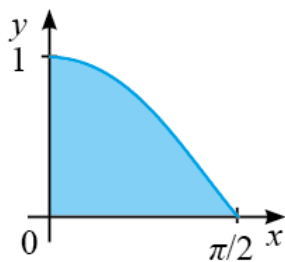
j) $\int_1^3 2e^{5x} \, dx$

k) $\int_0^4 2^{3x} \, dx$

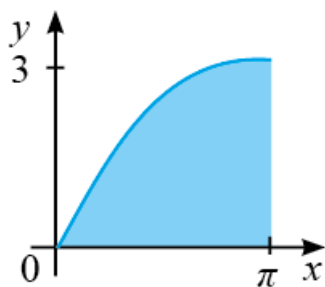
l) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+x^2}$

6. Determina el área de la región indicada

a) $y = \cos x$



b) $y = x + \sin x$



7. Determina el área de la región delimitada por las ecuaciones $y = -x^2 + 4$, $y = 0$, $x = -4$ y $x = 0$.

8. Calcula el área delimitada por el eje de las abscisas, la gráfica de $f(x) = x^3 + 2x + 3$ en el intervalo $0 \leq x \leq 4$.

9. Calcula el área comprendida por la parábola $y = 9 - x^2$ el eje de las x .

10. Determina si las siguientes integrales definidas existen.

a) $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$ b) $\int_{-4}^0 \frac{1}{x+1} dx$ c) $\int_3^6 \frac{1}{x} dx$ d) $\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx$

11. Evalúa la integral definida utilizando los siguientes valores.

$$\int_2^4 x^3 dx = 60, \int_2^4 x dx = 6 \text{ y } \int_2^4 dx = 2$$

a) $\int_4^2 x dx$ b) $\int_2^2 x^3 dx$ c) $\int_3^3 dx$ d) $\int_4^4 x dx$ e) $\int_2^4 5x dx$

f) $\int_2^4 13 \, dx$ g) $\int_2^4 (x - 7) \, dx$ h) $\int_2^4 (x^3 + 6) \, dx$ i) $\int_2^4 (12 - 4x - 3x^3) \, dx$

12. Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{-2}^2 t^3 \, dt$ b) $\int_{-3}^5 (r^2 - r + 2) \, dr$ c) $\int_1^3 \frac{2x^2 - 7}{x} \, dx$
d) $\int_{-1}^3 (x + 1)(2x - 5) \, dx$ e) $\int_2^4 \frac{(2x+1)(x-3)}{x} \, dx$ f) $\int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} \right) \, dx$
g) $\int_1^4 \left(s - \frac{1}{s} \right)^4 \, ds$ h) $\int_0^8 x^3 \sqrt{x} \, dx$ i) $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - 3\sqrt{t} \right) \, dt$
j) $\int_2^5 \left(\frac{\sqrt{w}+2}{\sqrt{w}} \right) \, dw$ k) $\int_1^4 \frac{dx}{x^2 \sqrt{x}}$ l) $\int_3^5 \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} \, dx$
m) $\int_0^{\pi/3} (\tan^2 \theta + 1) \, d\theta$ n) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta}{5} \, d\theta$ o) $\int_0^{\pi/4} (\sin 2\theta - 5 \cos 4\theta) \, d\theta$
p) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ q) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ r) $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
s) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ t) $\int_0^1 (e^x + e^{-x}) \, dx$ u) $\int_0^1 \frac{e^{5x} + e^{6x}}{e^{3x}} \, dx$

13. Calcula el área bajo la gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = x + 4, x = 2$ y $x = 5$ b) $y = 2 + x - x^2, x = -1$ y $x = 2$
c) $y = x^2 - x + 1, x = -1$ y $x = 0$ d) $f(x) = e^{2x}, x = 0$ y $x = \ln 2$
e) $f(x) = e^x - 1, x = -1$ y $x = 1$ f) $f(\theta) = \sin^2 \theta, \theta = 0$ y $\theta = 2\pi$

14. Determina el área de la región bajo la curva $y = 1 + \sqrt{x}$ en los intervalos:

a) $0 \leq x \leq 2$ b) $2 \leq x \leq 4$ c) $0 \leq x \leq 4$

Bibliografía

- Cuellar, J. A. (2013). *Matemáticas VI: Cálculo integral* (Segunda ed.). México: McGrawHill.
- Fuenlabrada, S., Fuenlabrada Velázquez, I. R. (2013). *Cálculo integral* (Cuarta ed.). México: McGrawHill.
- Granville, W. A. (2014). *Cálculo diferencial e integral*. México: LIMUSA.
- Hoffmann, L. D, Bradley, G. L. Rosen, K. H. (). *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales* . (Octava ed.). México: McGrawHill.
- Larson, R. y Hostetler, R. P. y Edwards, B. H. (2009). *Cálculo integral: Matemáticas II*. México, McGrawHill.
- Oteyza, E. (2006). *Conocimientos fundamentales de matemáticas: Cálculo diferencial e integral*. México. Pearson-Educación y UNAM.
- Purcell, E. J., Varberg, G. y Rigdon, S. E. (2007). *Cálculo diferencial e integral* (Novena ed.). México. Pearson-Educación.
- Salazar Guerrero, L. Bahena Román, H., Vega Hernández, F. (2009). *Cálculo integral*. Grupo Editorial Patria.
- Smith, R. T. y Minton, R. B. (2003). *Cálculo diferencial e integral*. México, McGrawHill.
- Stewart, J. (2018). *Cálculo: Trascendentes tempranas*. México, Cengage Learning Editores.
- Zill, D. G y Wright, W. (2011). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*. (Cuarta ed.). México: McGrawHill.